Calcul littéral, équations, inéquations

1) Calcul littéral

a. Égalités des expressions littérales

Des expressions sont littérales quand elles sont écrites avec des **lettres**. Elles sont **égales** quand elles donnent le même résultat **quel que soit le nombre** remplaçant chacune des lettres de l'expression.
S'il y a une seule valeur pour lesquelles l'égalité n'est pas vérifiée, alors ces expressions ne seront pas égales.

On distingue trois types d'expressions :

- les sommes – la dernière opération à effectuer (en respectant les règles de l'ordre de calcul) est une **somme** ou une **différence** (addition ou soustraction)
- les produits – la dernière opération à effectuer (en respectant les règles de l'ordre de calcul) est un **produit** (multiplication)
- les quotients – la dernière opération à effectuer (en respectant les règles de l'ordre de calcul) est un **quotient** (division)
  – elles sont souvent exprimées sous formes de **fractions**

b. Développer et réduire des expressions littérales

Réduire ou simplifier une expression = l'écrire avec le moins de termes possibles.
Développer une expression = l'écrire sous la forme d'une somme d'expressions simples.

- Propriété de distributivité

$a\,(b + c) = ab + ac$
$-(a + b) = -a - b$
$-(a - b) = -a + b$

- Propriété de double distributivité

$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$

- Les identités remarquables

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

c. Factoriser une expression littérale

Factoriser une expression = l'écrire sous la forme d'un produit, en utilisant les propriétés des opérations et les identités remarquables dans « l'autre sens ».

- Propriété de distributivité

$ab + ac = a\,(b + c)$
$-a - b = -(a + b)$
$-a + b = -(a - b)$

- Propriété de double distributivité

$ac + ad + bc + bd = (a + b)\,(c + d)$

• Les identités remarquables

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

2) Les équations

Une **équation** est une **égalité conditionnelle** qui contient une ou plusieurs **inconnues**. Elles sont représentées par des **lettres**.
L'identité est une égalité **vraie**, quelles que soient les valeurs données aux lettres.
L'équation est une égalité qui n'est **pas nécessairement vraie** pour toutes les valeurs.

a. Équations à une inconnue

• Équation du 1er degré

$ax = b$
x est l'inconnue et a et b des nombres réels

• Équation produit

$(ax + b)(cx + d) = 0$
Quels que soient a et b, ab = 0 équivaut à a = 0 ou b = 0

Les **valeurs** pour lesquelles **l'égalité est vraie** sont les **solutions de l'équation**. Résoudre une équation c'est trouver **l'ensemble de ces solutions**.
Deux équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions.

Pour résoudre une équation, on commence souvent par rechercher **une équation qui lui est équivalente** et qui est plus facile à résoudre.

Pour cela, il existe **3 règles** :

• Simplifier chacun des membres (développer ou factoriser).
• Ajouter ou retrancher aux deux membres une même expression algébrique.
• Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre non nul.

b. Système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

• Système de 2 équations
du 1er degré à 2 inconnues

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels

Un couple de deux nombres qui vérifie **simultanément** les deux équations est solution du système.

3) Les inéquations

a. Inéquations du 1er degré à une inconnue

Les inéquations du 1er degré à une inconnue sont équivalentes aux inéquations de la forme :

$ax < b$ $\quad$ $ax \leq b$ $\quad$ $ax > b$ $\quad$ $ax \geq b$

Pour résoudre une inéquation, il faut la ramener à l'une des formes précédentes.

Pour cela, il existe **4 règles** :

- Simplifier chacun des membres (développer ou factoriser).
- Ajouter ou retrancher aux deux membres une même expression algébrique.
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre **positif**.
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre **négatif** à condition de **changer le sens** de l'égalité.

b. Système de deux inéquations du 1er degré à deux inconnues

- Système de 2 inéquations du 1er degré à 2 inconnues

$$\begin{cases} ax + by + c < 0 \\ a'x + b'y + c' < 0 \end{cases}$$

a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels

Les signes peuvent être remplacés par >, $\leq$ ou $\geq$.

Pour résoudre ce système d'inéquations, on utilise le plus souvent une **méthode graphique**, qui permet de visualiser **toutes les solutions**.

Méthode

1) Résoudre une équation de la forme ax = b

• Si l'équation est différente de la forme ax = b, la transformer pour qu'elle prenne la forme ax = b. Utiliser les 3 règles vues dans le cours.

• Si **a ≠ 0**, l'équation ne possède qu'une solution : $\frac{b}{a}$

• Si **a = 0 et b ≠ 0**, alors l'équation n'a **pas de solution**.

• Si **a = 0 et b = 0**, alors **tout nombre réel est solution** de l'équation.

Ex : Résoudre $4(2 + x) = 7 - 2x$
→ On développe le premier membre : $8 + 4x = 7 - 2x$
→ On additionne $2x$ aux deux membres : $8 + 4x + 2x = 7 \cancel{- 2x}$
→ On soustrait 8 aux deux membres : $\cancel{8} + 4x + 2x = 7 - 8$. On obtient : $6x = -1$
→ Dans cette équation, x est différent de 0. On peut donc diviser les deux membres par 6 :
$\cancel{6}x = -1 \div 6$.
→ **$x = \frac{1}{6}$ est la solution de l'équation.**

2) Résoudre un problème par une mise en équation

• Choisir les inconnues les plus pertinentes en fonction du problème (parfois il est intéressant de choisir une autre inconnue que celle suggérée par l'énoncé).
• Traduire les informations fournies par des égalités ou des inégalités. On obtient peu à peu des équations ou des inéquations.
• Résoudre l'équation obtenue en utilisant les 3 règles citées dans la leçon.
• Conclure en interprétant les résultats obtenus en fonction de l'exercice. Si on a le temps, vérifier le résultat obtenu.

Ex : Lucette pense à un nombre. Elle lui ajoute 3 et multiplie le résultat obtenu par 3. Jeanne pense au même nombre que Lucette. Elle l'ajoute à 8. Toutes deux trouvent le même résultat. Quel est le nombre auquel elles ont pensé ?
→ On choisit comme inconnue le nombre auquel pense Lucette. On l'appelle x.
→ Lucette ajoute 3 au nombre de départ donc on obtient $x + 3$
→ Elle multiplie le nombre obtenu par 3, donc on obtient : $(x + 3) \times 3$
→ Jeanne choisit le même nombre x au départ. Elle lui ajoute 8. On obtient $x + 8$
→ Le nombre trouvé par Lucette et celui trouvé par Jeanne sont égaux. On en déduit l'égalité suivante : $(x + 3) \times 3 = x + 8$
→ Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation :
$(x + 3) \times 3 = x + 8$
$3x + 9 = x + 8$
$3x - x = 8 - 9$
$2x = -1$
$x = -\frac{1}{2}$
→ **$x = -\frac{1}{2}$ est la solution de l'équation. C'est le nombre que Lucette et Jeanne ont choisi.**

3) Résoudre un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

Méthode 1 : par substitution

• Tirer y de la première équation.
• Remplacer y par son expression en fonction de x dans la deuxième équation.
• Chercher l'inconnue x.
• Chercher l'inconnue y.
• Noter la solution.

Méthode 2 : par combinaison

• Égaliser les coefficients de y (ou de x) dans la première équation.
• Supprimer l'inconnue y (ou x).
• Chercher l'inconnue x.
• Chercher l'inconnue y.
• Noter la solution.

Ex : Résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

Méthode 1

→ $2x + y = 3$, donc $y = 3 - 2x$

→ On obtient : $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ 3x + 2(3 - 2x) = -5 \end{cases}$. Développée, cette équation est égale à $-x + 6 = -5$.

→ On obtient : $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ -x + 6 = -5 \end{cases}$. On en déduit que $x = 11$

→ Si $x = 11$, alors il suffit de remplacer x dans la première équation pour trouver y.

→ $2 \times 11 + y = 3$, donc $22 + y = 3$. On en déduit que $y = 3 - 22$, soit -19.

→ **Le système a pour solution le couple (11 ; – 19).**

Méthode 2

→ On égalise les coefficients de y : $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$ $\begin{matrix} \rightarrow -4x - 2y = -6 \\ \rightarrow \quad 3x + 2y = -5 \end{matrix}$

→ On additionne les deux équations membres à membres. On obtient : $-x = -11$, donc $x = 11$.

→ La suite de la résolution est la même que dans l'exercice précédent.

3) Résoudre un système de deux inéquations du 1er degré à deux inconnues

• Simplifier chaque inégalité.

• Tracer, dans un repère, les deux droites associée à l'inéquation en remplaçant les signes de comparaison par le signe =.

• Pour les coordonnées d'un point situé dans un demi-plan déterminé par l'une des deux droites, chercher le signe de l'expression algébrique associé à cette droite (+ ou –).

Si ce signe **est le même** que celui qui figure dans l'équation correspondante, **tout le demi-plan est hachuré**. Sinon c'est **l'autre demi-plan** qui est hachuré. On procède de la même manière pour les deux droites.

• **La partie du plan hachurée deux fois contient tous les points** dont les coordonnées sont solutions du système d'inéquations.