

Les quatre opérations

1) L'addition

- **Aspect cardinal** : a et b sont tous deux les nombres d'un ensemble A et d'un ensemble B. a et b n'ont pas d'élément commun. $a + b$ est le nombre d'éléments de l'ensemble constitué par A et B.
- **Aspect ordinal** : $a + b$ est égal au nombre atteint en comptant b nombres consécutifs après a . Cela suppose de connaître la suite ordonnée des nombres naturels.

Propriétés

- **associativité** : on peut regrouper « comme on veut » les nombres dans une addition.
- **commutativité** : on peut permuter deux termes dans l'opération.

2) La soustraction

- **Aspect cardinal** : a et b sont tous deux les nombres d'un ensemble A et d'un sous-ensemble B (issu de l'ensemble A). $a - b$ est le nombre d'éléments qui appartiennent à A sans appartenir à B.
- **Aspect ordinal** : $a - b$ est égal au nombre atteint en comptant b nombres avant a .
- **À partir de l'addition** : a étant supérieur ou égal à b , $a - b$ est la solution de l'équation $b + x = a$. Il y a donc équivalence entre $x = a - b$ et $b + x = a$.

Propriétés

- **conservation de la différence** : avec $a \geq b \rightarrow a - b = (a + c) - (b + c)$
- **ajout d'une différence** : avec $b \geq c \rightarrow a + (b - c) = (a + b) - c$
- **soustraction d'une somme** : avec $a \geq b + c \rightarrow a - (b + c) = (a - b) - c$
- **soustraction d'une différence** : avec $a \geq b \geq c \rightarrow a - (b - c) = (a - b) + c$

3) La multiplication

- **À partir de l'addition** : a et b sont deux entiers naturels, donc $a \times b$ est égal à a répété b fois.
- **À partir de la notion d'ensemble** : le produit de a par b est le nombre de couples $(x; y)$ en choisissant x dans un ensemble ayant a éléments, et y dans un ensemble ayant b éléments (cf. tableau à double entrée).

Propriétés

- **associativité** : on peut regrouper comme on veut les nombres dans une multiplication.
Ex : $5 \times 4 \times 2 = (5 \times 4) \times 2 = 20 \times 2 = 40$ $5 \times 4 \times 2 = 5 \times (4 \times 2) = 5 \times 8 = 40$
- **commutativité** : on peut permuter deux termes dans l'opération.
- **distributivité de la multiplication sur l'addition** : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ ou $a \times (b + c) = ab + ac$

4) La division

- **Division euclidienne** : la division euclidienne de a par b est l'opération par laquelle on associe à a et b les entiers naturels q (quotient) et r (reste) : $a = (b \times q) + r$, où $r < b$
- **Division décimale** : cette division est liée à la recherche de la solution l'équation $a = b \times x$, où x est le quotient de a par b , soit $\frac{a}{b}$.

Propriétés

- **conservation du quotient** : le quotient n'est pas modifié si on multiplie ou divise les deux termes de la division par le même nombre k .
- **division d'une somme** : dans l'ensemble Q (nombres rationnels), on note : $\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$