

Les fonctions linéaires et affines

Une fonction numérique f est une relation entre deux ensembles de nombres E et F . Cette relation associe à chaque élément de E un élément de F . On note une fonction de la manière suivante :

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \rightarrow f(x)$$

f est la **fonction**.

$f(x)$ est l'**image** de x .

Si $f(x) = b$, alors x est l'**antécédent** de b .

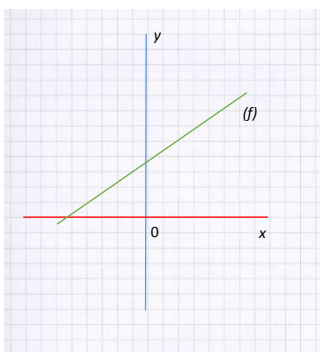
Ex : l'aire du cercle peut être représentée par une fonction.

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ (ensemble des rationnels positifs)}$$

$$x \rightarrow \pi x^2$$

Donc : $f(3) = 9\pi$. 9π est l'image de 3. 3 est l'antécédent de 9π .

1) Représentation graphique



La représentation graphique d'une fonction sert à lire l'image ou l'antécédent d'un nombre, à connaître la plus petite valeur prise par la fonction, etc. On représente une fonction sur un axe composé d'une **abscisse** (horizontale) nommée x et d'une **ordonnée** (verticale) nommée y . Le croisement des deux axes est l'**origine** et correspond au point $(0 ; 0)$.

Si la **droite** « monte » quand on la regarde de gauche à droite, on dit que la fonction est **croissante**.

Si elle « descend », on dit qu'elle est **décroissante**.

2) Fonction linéaire

Une fonction linéaire peut être décrite par : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

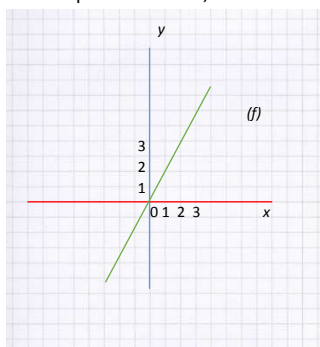
$$x \rightarrow ax$$

La droite correspondant à une fonction linéaire **passé forcément par l'origine** $(0 ; 0)$.

x et y sont l'abscisse et l'ordonnée. Ils sont reliés par la relation $y = ax$. C'est l'**équation de la droite**.

a est le **coefficient directeur** de la droite.

a caractérise « la pente » de la droite, c'est-à-dire son inclinaison par rapport à l'axe des abscisses. Si a est supérieur à 0, la fonction linéaire est croissante. Si a est inférieur à 0, elle est décroissante.



Ex : ici, l'équation de la droite est $y = 2x$. On remarque que quand $x = 1$, $y = 2$.

3) Fonction affine

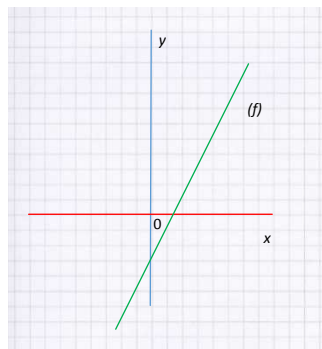
Une fonction affine peut être décrite par :
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto ax + b$

La droite correspondant à une fonction affine **ne passe pas par l'origine**.

x et y sont reliés par la relation **$y = ax + b$** . C'est **l'équation de la droite**.

a est le **coefficient directeur** de la droite.

b est **l'ordonnée à l'origine**. Il est l'image du nombre 0, donc on a $f(0) = b$.



Ex : ici, l'équation de la droite est $y = 2x - 3$.

Ainsi, quand $x = 4$, $y = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$.

-3 est **l'ordonnée à l'origine**.

Méthode

1) Trouver l'équation d'une droite passant par deux points donnés

- L'équation d'une droite est du type : $y = ax + b$.
- Écrire deux équations d'inconnues a et b en remplaçant x et y par les coordonnées des deux points.
- Résoudre les deux équations à deux inconnues.
- Écrire l'équation de la droite en remplaçant a et b par les valeurs trouvées.

Ex : Trouver l'équation de la droite passant par les points (8 ; 1) et (10 ; 2,5).

L'équation est du type : $y = ax + b$.

Avec (8 ; 1), on a : $1 = 8a + b$.

Avec (10 ; 2,5), on a : $2,5 = 10a + b$.

On résout les deux équations en les soustrayant membre à membre. On obtient :

$$1,5 = 2a \text{ donc } a = 0,75$$

On reporte la valeur de a dans la première équation :

$$1 = 8 \times 0,75 + b$$

$$1 = 6 + b$$

$$b = -5$$

L'équation de la droite est donc : $y = 0,75x - 5$

La droite est associée à la fonction affine : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow 0,75x - 5$$

2) Calculer le coefficient directeur d'une droite

- L'équation d'une droite est du type : $y = ax + b$
- Les coordonnées de deux points sur la droite sont notés $(x ; y)$ et $(x' ; y')$.
- Pour calculer le coefficient directeur d'une droite, on applique la formule suivante :

$$a = \frac{y' - y}{x' - x}$$

3) Calculer l'ordonnée à l'origine d'une droite

- L'équation d'une droite est du type : $y = ax + b$
- On détermine l'ordonnée à l'origine b en utilisant les coordonnées d'un des points de la droite qui, forcément, vérifient l'équation $y = ax + b$ dans laquelle on connaît x , y et a . Si $y = ax + b$, on en déduit donc que $b = y - ax$.

4) Déterminer l'équation d'une droite parallèle à une droite $y = ax + b$

- Les deux droites sont parallèles, donc elles ont le même coefficient directeur a .
- On détermine l'ordonnée à l'origine b en utilisant les coordonnées d'un point C ($x_C ; y_C$).

Ex : Déterminer l'équation de la droite (d) parallèle à (d') passant par C.

L'équation de (d') est $y = 5x + 1$. Le point C a pour coordonnées (2 ; 1).

(d) est parallèle à (d'). On en déduit donc que la droite (d) a pour équation $y = 5x + b$.

Le point C (2 ; 1) appartient à (d).

On en déduit : $1 = 5 \times 2 + b = 10 + b$. Donc $b = 1 - 10 = -9$.

L'équation de la droite (d) est : $y = 5x - 9$