CALCUL

Multiples et diviseurs

a et b sont deux nombres naturels. Si $a = b \times k$ alors :
a est un **multiple** de b
b est un **diviseur** de a
a est **divisible** par b

1) Propriétés générales

- Tout naturel est multiple de 1.
- 1 est diviseur de tout naturel.
- 1 n'a qu'un seul diviseur : lui-même.
- Tout naturel est multiple ET diviseur de lui-même.
- 0 n'a qu'un seul multiple : lui-même.
- Si a est diviseur de n, alors le quotient de $\frac{n}{a}$ est un diviseur de n, puisque $n = a \times q$.

2) Propriétés des opérations

- Si a et b sont multiples de c, alors $a + b$ est multiple de c.
- Si c est un diviseur de a et b, alors c est un diviseur de $a + b$.

- Si $a \geq b$ et que a et b sont multiples de c, alors $a - b$ est multiple de c.
- Si $a \geq b$ et que c est un diviseur de a et b, alors c est un diviseur de $a - b$.

- Si a et b sont multiples de c, alors $a \times b$ est multiple de c.
- Si c est un diviseur de a et b, alors c est un diviseur de $a \times b$.

- Si a est multiple de b, et que b est multiple de c, alors a est multiple de c.
- Si c est un diviseur de b, et que b est un diviseur de a, alors c est un diviseur de a.

3) Critères de divisibilité

- Un nombre est divisible par **2** quand son chiffre des unités est pair.
- Un nombre est divisible par **4** quand le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- Un nombre est divisible par **5** seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par **10** seulement si son chiffre des unités est 0.
- Un nombre est divisible par **9** seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre est divisible par **3** seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

4) Nombres premiers

Un nombre est dit **premier** s'il n'a que **deux diviseurs : 1 et lui-même**.

- Les multiples de deux nombres (ou plus) sont les multiples du ppcm de ces deux nombres.
- Les diviseurs communs de deux nombres (ou plus) sont les diviseurs du pgcd de ces deux nombres.
- Deux nombres naturels dont le pgcd est 1 sont dits « premiers entre eux ».
- Les décompositions en produits de facteurs premiers de deux nombres premiers entre eux n'ont aucun facteur commun.
- Si n est divisible par a et b, et si a et b sont premiers entre eux, alors n est divisible par $a \times b$.
- Si un n divise un produit de deux facteurs et s'il est premier avec l'un d'entre eux, alors il divise l'autre.

Méthode

1) Chercher si un nombre est premier

• Diviser ce nombre par le plus petit nombre premier : 2. S'il n'est pas divisible par 2, poursuivre.
• Diviser ce nombre par les nombres premiers consécutifs, dans l'ordre croissant : 3, 5, 7, 11, etc.
• Arrêter au plus grand nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$.
• Si le nombre que l'on cherchait à diviser n'est divisible par aucun de ces nombres premiers, alors il est lui-même premier.

2) Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

• Diviser le nombre *n* par le plus petit nombre premier par lequel il est divisible.
• Diviser le quotient obtenu par le plus petit nombre premier par lequel il est divisible.
• Continuer ainsi jusqu'à ce que le quotient soit égal à 1. La décomposition est le produit de tous les nombres entiers successifs.

Ex : Trouver la décomposition de 392.
392 / 2 = 196 196 / 2 = 98 98 / 2 = 49 49 / 7 = 7 7 / 7 = 1
La décomposition est donc : 2 x 2 x 2 x 7 x 7 = 2^3 x 7^2

3) Chercher tous les diviseurs d'un nombre

• Décomposer le nombre en produits de facteurs premiers.
• Utiliser un arbre permettant d'obtenir les décompositions en produits de facteurs premiers de ces diviseurs (voir fiche sur les « Méthodes de dénombrement »).

Ex : La décomposition de 392 est 2^3 x 7^2.
On a donc : $2^0 \to 7^0$ $2^0 \to 7^1$ $2^0 \to 7^2$
$2^1 \to 7^0$ $2^1 \to 7^1$ $2^1 \to 7^2$
Etc.

4) Chercher combien de diviseurs possède un nombre *n*

• Décomposer le nombre *n* en produits de facteurs premiers.
• La décomposition obtenue est de forme a^p x b^q x c^r. On utilise la formule suivante pour trouver le nombre de diviseurs de *n* :

$$\boxed{(p + 1) \times (q + 1) \times (r + 1)}$$

5) Trouver le ppcm de deux nombres

Rappel : le ppcm est le « plus petit commun diviseur » de deux nombres.

• Décomposer les deux nombres en produits de facteurs premiers.
• Calculer le ppcm en multipliant tous les types facteurs qui figurent dans l'une **ou** l'autre des décompositions, affectés de l'exposant le plus **grand** avec lesquels ils sont notés dans l'une des décompositions.

Ex : 72 = 2^3 x 3^2 90 = 2 x 3^2 x 5 Donc le **ppcm = 2^3 x 3^2 x 5 = 360**

6) Trouver le pgcd de deux nombres

Rappel : le pgcd est le « plus grand commun diviseur » de deux nombres.

• Décomposer les deux nombres en produit de facteurs premiers.
• Calculer le pgcd en multipliant tous les types facteurs qui figurent dans l'une **et** l'autre des décompositions, affectés de l'exposant le plus **petit** avec lesquels ils sont notés dans l'une des décompositions.
S'il n'y a pas de facteur commun aux deux décompositions, alors le pgcd est 1.

Ex : $42 = 2 \times 3 \times 7$ $98 = 2 \times 7^2$ Donc le **pgcd = 2 x 7 = 14**

7) Utiliser ses connaissances pour savoir si *a* est un diviseur de *b*

Méthode 1 : utiliser un critère de divisibilité, si c'est possible.
Méthode 2 : dans la division euclidienne, regarder si le reste est égal à 0 ou si *b* = *a x un nombre naturel*.
Méthode 3 : chercher si *b* est la somme, la différence ou le produit de nombres tous divisibles par *a*.
Méthode 4 : décomposer les nombres en produit de facteurs premiers. Si les facteurs de *a* et de *b* sont les mêmes et que les exposants des facteurs de *a* sont inférieurs ou égaux à ceux de *b*, alors *a* est un diviseur de *b*.
Méthode 5 : utiliser le fait que si *m* est un diviseur de *n* et *n* un diviseur de *p*, alors *m* est un diviseur de *p*.