

Multiples et diviseurs

a et b sont deux nombres naturels. Si $a = b \times k$ alors :

- a est un **multiple** de b
- b est un **diviseur** de a
- a est **divisible** par b

1) Propriétés générales

- Tout naturel est **multiple de 1**.
- **1** est **diviseur** de tout naturel.
- **1** n'a qu'un seul diviseur : **lui-même**.
- Tout naturel est **multiple ET diviseur** de lui-même.
- **0** n'a qu'un seul multiple : **lui-même**.
- Si a est **diviseur** de n , alors le **quotient** de $\frac{n}{a}$ est un **diviseur** de n , puisque $n = a \times q$.

2) Propriétés des opérations

- Si a et b sont **multiples de c** , alors $a + b$ est **multiple de c** .
- Si c est un **diviseur de a et b** , alors c est un **diviseur de $a + b$** .

- Si $a \geq b$ et que a et b sont **multiples de c** , alors $a - b$ est **multiple de c** .
- Si $a \geq b$ et que c est un **diviseur de a et b** , alors c est un **diviseur de $a - b$** .

- Si a et b sont **multiples de c** , alors $a \times b$ est **multiple de c** .
- Si c est un **diviseur de a et b** , alors c est un **diviseur de $a \times b$** .

- Si a est **multiple de b** , et que b est **multiple de c** , alors a est **multiple de c** .
- Si c est un **diviseur de b** , et que b est un **diviseur de a** , alors c est un **diviseur de a** .

3) Critères de divisibilité

- Un nombre est **divisible par 2** quand **son chiffre des unités est pair**.
- Un nombre est **divisible par 4** quand le **nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4**.
- Un nombre est **divisible par 5** seulement si **son chiffre des unités est 0 ou 5**.
- Un nombre est **divisible par 10** seulement si **son chiffre des unités est 0**.
- Un nombre est **divisible par 9** seulement si **la somme de ses chiffres est divisible par 9**.
- Un nombre est **divisible par 3** seulement si **la somme de ses chiffres est divisible par 3**.

4) Nombres premiers

Un nombre est dit **premier** s'il n'a que **deux diviseurs : 1 et lui-même**.

- Les **multiples de deux nombres** (ou plus) sont les **multiples du ppcm** de ces deux nombres.
- Les **diviseurs communs** de deux nombres (ou plus) sont les **diviseurs du pgcd** de ces deux nombres.
- Deux nombres naturels dont le pgcd est 1 sont dits « **premiers entre eux** ».
- Les **décompositions** en produits de facteurs premiers de **deux nombres premiers entre eux** n'ont **aucun facteur commun**.
- Si n est divisible par a et b , et si a et b sont premiers entre eux, alors n est divisible par $a \times b$.
- Si un n divise un produit de deux facteurs et s'il est premier avec l'un d'entre eux, alors il divise l'autre.

Méthode

1) Chercher si un nombre est premier

- Diviser ce nombre par le plus petit nombre premier : 2. S'il n'est pas divisible par 2, poursuivre.
- Diviser ce nombre par les nombres premiers consécutifs, dans l'ordre croissant : 3, 5, 7, 11, etc.
- Arrêter au plus grand nombre premier inférieur à \sqrt{n} .
- Si le nombre que l'on cherchait à diviser n'est divisible par aucun de ces nombres premiers, alors il est lui-même premier.

2) Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

- Diviser le nombre n par le plus petit nombre premier par lequel il est divisible.
- Diviser le quotient obtenu par le plus petit nombre premier par lequel il est divisible.
- Continuer ainsi jusqu'à ce que le quotient soit égal à 1. La décomposition est le produit de tous les nombres entiers successifs.

Ex : Trouver la décomposition de 392.

$$392 / 2 = 196 \quad 196 / 2 = 98 \quad 98 / 2 = 49 \quad 49 / 7 = 7 \quad 7 / 7 = 1$$

La décomposition est donc : $2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 7^2$

3) Chercher tous les diviseurs d'un nombre

- Décomposer le nombre en produits de facteurs premiers.
- Utiliser un arbre permettant d'obtenir les décompositions en produits de facteurs premiers de ces diviseurs (voir fiche sur les « Méthodes de dénombrement »).

Ex : La décomposition de 392 est $2^3 \times 7^2$.

$$\begin{array}{l} \text{On a donc : } 2^0 \rightarrow 7^0 \quad 2^0 \rightarrow 7^1 \quad 2^0 \rightarrow 7^2 \\ \quad \quad \quad 2^1 \rightarrow 7^0 \quad 2^1 \rightarrow 7^1 \quad 2^1 \rightarrow 7^2 \\ \quad \quad \quad \text{Etc.} \end{array}$$

4) Chercher combien de diviseurs possède un nombre n

- Décomposer le nombre n en produits de facteurs premiers.
- La décomposition obtenue est de forme $a^p \times b^q \times c^r$. On utilise la formule suivante pour trouver le nombre de diviseurs de n :

$$(p + 1) \times (q + 1) \times (r + 1)$$

5) Trouver le ppcm de deux nombres

Rappel : le ppcm est le « plus petit commun multiple » de deux nombres.

- Décomposer les deux nombres en produits de facteurs premiers.
- Calculer le ppcm en multipliant tous les types facteurs qui figurent dans l'une **ou** l'autre des décompositions, affectés de l'exposant le plus **grand** avec lesquels ils sont notés dans l'une des décompositions.

$$\text{Ex : } 72 = 2^3 \times 3^2 \quad 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \quad \text{Donc le ppcm} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

6) Trouver le pgcd de deux nombres

Rappel : le pgcd est le « plus grand commun diviseur » de deux nombres.

- Décomposer les deux nombres en produit de facteurs premiers.
 - Calculer le pgcd en multipliant tous les types facteurs qui figurent dans l'une **et** l'autre des décompositions, affectés de l'exposant le plus **petit** avec lesquels ils sont notés dans l'une des décompositions.
- S'il n'y a pas de facteur commun aux deux décompositions, alors le pgcd est 1.

$$\text{Ex : } 42 = 2 \times 3 \times 7 \quad 98 = 2 \times 7^2 \quad \text{Donc le pgcd} = 2 \times 7 = 14$$

7) Utiliser ses connaissances pour savoir si a est un diviseur de b

Méthode 1 : utiliser un critère de divisibilité, si c'est possible.

Méthode 2 : dans la division euclidienne, regarder si le reste est égal à 0 ou si $b = a \times \text{un nombre naturel}$.

Méthode 3 : chercher si b est la somme, la différence ou le produit de nombres tous divisibles par a .

Méthode 4 : décomposer les nombres en produit de facteurs premiers. Si les facteurs de a et de b sont les mêmes et que les exposants des facteurs de a sont inférieurs ou égaux à ceux de b , alors a est un diviseur de b .

Méthode 5 : utiliser le fait que si m est un diviseur de n et n un diviseur de p , alors m est un diviseur de p .