Probabilités

1) Expérience aléatoire

Une expérience est dite « **aléatoire** » si elle vérifie deux conditions :
– elle conduit à des **résultats possibles** qu'on peut parfaitement nommer ;
– **on ne sait pas quel sera le résultat** qui va se produire quand on fera l'expérience.

Par exemple, jouer à **pile ou face** est une expérience aléatoire : on sait que la pièce tombera sur pile ou sur face, sans savoir quel sera le résultat.

2) Événement

À partir d'une expérience aléatoire, on peut définir des **événements**. Ce sont des **ensembles de résultats.**

Par exemple, si l'on jette un dé et qu'il **tombe sur un chiffre pair**, c'est un **événement.** En effet, « tomber sur un chiffre pair » est l'ensemble des résultats : « tomber sur un 2 », « tomber sur un 4 », « tomber sur un 6 ».

3) Probabilité

Pour certaines expériences aléatoires, on peut déterminer par un quotient la « **chance** » qu'un événement se produise. Quand on reproduit une expérience aléatoire de nombreuses fois, la **fréquence** de n'importe quel événement (tomber sur face, tirer un chiffre pair, etc.) **va finir par se stabiliser** autour d'un nombre. Ce nombre est appelé **probabilité de l'événement**.

a. Propriétés des probabilités

Propriété 1 : Quand les résultats d'une expérience aléatoire ont tous la même chance de se produire, la probabilité de l'événement est égale à :

$$\frac{Nombre\ de\ résultats\ favorables\ à\ la\ réalisation\ de\ l\ événement}{Nombres\ de\ résultats\ possibles}$$

Ex : On lance un dé à 6 faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité qu'il « tombe » sur un chiffre pair ?
Les résultats favorables sont : 2, 4 et 6. Il y a donc 3 résultats favorables à la réalisation de l'événement. Le nombre de résultats total possibles est de 6 (puisque le dé a 6 faces).
La probabilité de tomber sur un nombre pair est donc de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Propriété 2 : La probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1.

Propriété 3 : La somme des probabilités de toute expérience aléatoire est égale à 1.

b. Probabilité de l'événement contraire

Dans une expérience aléatoire, **l'événement contraire de A** est « **non A** ».

Propriété 4 : Si P est la probabilité d'un événement, alors $1 - P$ est la probabilité de l'événement contraire.

Ex : Dans une expérience avec des jetons numérotés, on sait que la probabilité **d'obtenir** un multiple de 3 est de $\frac{1}{3}$. La probabilité de **ne pas obtenir** de multiple de 3 est donc de $\frac{2}{3}$.

c. Probabilité des événements indépendants

Deux événements d'une expérience aléatoire sont **indépendants** si les **résultats de l'un** n'ont **aucune influence sur les résultats de l'autre.**

Propriété 5 : Si A et B sont deux événements indépendants, alors la probabilité (P) de l'événement A et B est : P(A et B) = P(A) × P(B)

Ex : Le sachet A contient 2 bonbons rouges et 3 bonbons verts. Le sachet B contient 5 bonbons jaunes et 3 bonbons bleus. « Tirer un bonbon rouge du sachet A » et « Tirer un bonbon jaune du sachet B » sont deux événements indépendants.
La probabilité de « Tirer un bonbon rouge du sachet A + un bonbon jaune du sachet B » est de :
Probabilité 1 de tirer un bonbon rouge = $\frac{2}{5}$ Probabilité 2 de tirer un bonbon jaune = $\frac{5}{8}$
Probabilité 1 × Probabilité 2 = $\frac{2}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.
Il y a donc $\frac{1}{4}$ de « chance » de tirer un bonbon rouge du sachet A et un bonbon jaune du sachet B.

d. Probabilité des événements incompatibles

Deux événements A et B sont **incompatibles** s'ils ne **peuvent pas se produire simultanément**, c'est-à-dire si la probabilité de « A **et** B » est nulle.

Propriété 5 : Si A et B sont deux événements incompatibles, alors la probabilité de l'événement A **ou** B est : P(A ou B) = P(A) + P(B)

Ex : Si on lance un dé à 6 faces, les événements « Obtenir le chiffre 2 » **et** « Obtenir un nombre impair » sont incompatibles.
En revanche, la probabilité « Obtenir le chiffre 2 » **ou** « Obtenir un nombre impair » est égale à la somme « Probabilité d'obtenir le chiffre 2 » + « Probabilité d'obtenir un nombre impair », soit :
« Probabilité d'obtenir le chiffre 2 » : $\frac{1}{6}$ « Probabilité d'obtenir un nombre impair » : $\frac{3}{6}$
$= \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
Il y a donc $\frac{2}{3}$ de « chance » d'obtenir le chiffre 2 **ou** d'obtenir un nombre impair.

Attention : si les événements **ne sont pas incompatibles**, alors P(A ou B) = P(A) + P(B) – P(A et B).

C'est par exemple le cas si on veut connaître la « probabilité d'obtenir un multiple de 3 **ou** un chiffre pair » : il faut calculer la « probabilité d'avoir un multiple de 3 » **+** « la probabilité d'avoir un chiffre pair » **–** « la probabilité d'avoir un multiple de 3 **et** un chiffre pair ».