Proportionnalité

Deux suites de nombres réels sont proportionnelles si on peut passer de chaque terme de la première suite au terme correspondant dans la deuxième suite par **un même opérateur multiplicatif.**
L'opérateur multiplicatif est appelée **coefficient de proportionnalité**.
Pour chaque suite proportionnelle, il existe une fonction linéaire telle que f : R → R
$x \to ax$
Généralement, on représente deux suites proportionnelles de la manière suivante :

$\times a \downarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n	$\times \frac{1}{a} \uparrow$
	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n	

Propriétés des suites proportionnelles

• Si le coefficient de proportionnalité est positif, la proportionnalité respecte l'ordre.
• Si le coefficient de proportionnalité est négatif, la proportionnalité inverse l'ordre.

• Si deux suites sont proportionnelles, l'image d'une somme est la somme des images. Cette propriété se vérifie aussi avec la soustraction. C'est la propriété additive de linéarité.

$\times a \downarrow$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$\times \frac{1}{a} \uparrow$
	y_1	y_2	$y_1 + y_2$	

• Si deux suites sont proportionnelles, l'image du double, du triple, etc. d'un nombre est le double, le triple, etc. de l'image de ce nombre. Cette propriété se vérifie aussi avec la division. C'est la propriété multiplicative de linéarité.

$\times a \downarrow$	x	kx	$\times \frac{1}{a} \uparrow$
	y	ky	

• À partir des égalités $y_1 = ax_1$; $y_2 = ax_2$; … ; $y_n = ax_n$ on déduit les égalités suivantes. C'est la propriété des rapports égaux.

$$\boxed{\frac{y1}{x1} = \frac{y2}{x2} = \cdots = \frac{yn}{xn} = a}$$

• À partir de la propriété précédente et en utilisant une propriété d'égalité de deux fractions, on en déduit les égalités suivantes. C'est la propriété dite du « produit en croix ».

$\boxed{x_1 y_2 = x_2 y_1}$ ou $\boxed{x_2 y_5 = x_5 y_2}$

• Deux suites proportionnelles, à des écarts égaux entre les nombres de la première suite correspondent des écarts égaux entre les nombres dans la deuxième suite. C'est la propriété des écarts.

• Dans un système d'axes gradués régulièrement à partir de 0, les points dont les coordonnées sont les couples proportionnels sont alignés sur une droite passant par l'origine des axes.

Méthode

1) Reconnaître si deux suites de nombres sont proportionnelles

Méthode 1

• Calculer l'opérateur multiplicatif qui permet de passer de la suite 1 à la suite 2.
• Vérifier qu'il permet d'obtenir tous les couples formés.
• Si c'est le cas, la suite est proportionnelle.

Autres méthodes

• Il suffit de contrôler que les propriétés de la proportionnalité sont respectées : linéarité, rapports, égaux, écarts, produit en croix, ordre et propriété graphique.
• Si une seul de ces propriétés n'est pas respectée, alors la suite n'est pas proportionnelle.

2) Trouver une 4e proportionnelle

Méthode 1

• Calculer l'opérateur multiplicatif qui permet de passer de la suite 1 à la suite 2.
• Utiliser l'opérateur pour trouver le nombre manquant.

Méthode 2

• Utiliser les propriétés de la proportionnalité.

Ex : On cherche à savoir combien coûtent 9 mètres de tissu, sachant que :

Longueur de tissu (mètres)	6	9
Prix (€)	4	?

Propriété de linéarité : 6 ÷ 2 = 3 et 4 ÷ 2 = 2.
3 mètres de tissu coûtent donc 2 €. Or, 3 x 3 = 9 et 2 x 3 = 6.
On en déduit donc que 9 mètres de tissu coûtent 6 €.

Propriété du « produit en croix » : 4 x 9 = $6x$.
Donc 36 = $6x$, donc x est égal à 6.
On en déduit donc que 9 mètres de tissu coûtent 6 €.

3) Comparer des proportions

Méthode 1A : comparer des sous-quantités

• Faire un tableau de proportionnalité et calculer le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la sous-quantité 1 à la sous-quantité 2.
• Comparer les coefficients.
• Le coefficient le plus grand représentera une part proportionnellement plus grande par rapport à la sous-quantité qui a le plus petit coefficient.

Ex : On cherche à savoir qui a mis le plus de peinture verte dans son mélange :

A	Peinture blanche (litres)	5	$\times \frac{3}{5} \downarrow$
	Peinture verte (litres)	3	

B	Peinture blanche (litres)	7	$\times \frac{4}{7} \downarrow$
	Peinture verte (litres)	4	

$\frac{3}{5}$ est plus grand que $\frac{4}{7}$ donc il y aura plus de peinture verte dans le mélange A.

Méthode 1B : comparer des sous-quantités

- Faire un tableau de proportionnalité.
- Utiliser les propriétés de la proportionnalité.

Ex : On cherche à savoir qui a mis le plus de peinture verte dans son mélange :

Peinture blanche (litres)	5	35
Peinture verte (litres)	3	21

Peinture blanche (litres)	7	35
Peinture verte (litres)	4	20

On compare la quantité de peinture verte pour une même quantité de peinture blanche (cela revient à comparer des fractions, ce qui rejoint la méthode précédente).

Méthode 2A : comparer une sous-quantité à la quantité totale

- Calculer l'opérateur multiplicatif qui permet de passer de la sous-quantité à la quantité totale.
- Comparer les coefficients.
- Le plus grand coefficient correspond à une proportion plus importante de la sous-quantité.

Ex : On cherche à savoir qui a mis le plus de peinture verte dans son mélange :

A	Peinture blanche (litres)	5	= Quantité totale	8	$\times \frac{3}{8} \downarrow$
	Peinture verte (litres)	3	= Quantité de peinture verte	3	

B	Peinture blanche (litres)	7	= Quantité totale	11	$\times \frac{4}{11} \downarrow$
	Peinture verte (litres)	4	= Quantité de peinture verte	4	

$\frac{3}{8}$ est plus grand que $\frac{4}{11}$ donc il y aura plus de peinture verte dans le mélange A.

Méthode 2B : comparer une sous-quantité à la quantité totale

- Faire un tableau de proportionnalité.
- Utiliser les propriétés de la proportionnalité (voir méthode 1B).

4) Chercher une valeur proportionnelle à plusieurs autres grandeurs

- Faire varier proportionnellement deux grandeurs en gardant les autres grandeurs fixes
- Recommencer avec un autres couple de grandeurs, autant de fois que nécessaire.

Ex : 6 vaches produisent 4 000 litres de lait en 30 jours.
Combien de jours faudra-t-il à 18 vaches pour produire 72 000 litres de lait ?

Nombre de vaches	6	× 3	18	ne varie pas	18
Nombre de jours	30	ne varie pas	30	× 6	180
Volume de lait (litres)	4000	× 3	12	× 6	72000

Il faudra donc 180 jours à 18 vaches pour produire 72 000 litres de lait.

4) Chercher une valeur inversement proportionnelle à une autre grandeur

Méthode 1 : passage par l'unité

• Pour l'une des grandeurs, on passe par l'unité. Cette méthode est la plus simple.

> Ex : 6 jardiniers taillent une haie en 9 heures.
> Combien de temps faut-il à 7 jardiniers ? À 9 jardiniers ?
>
> Si 6 jardiniers taillent une haie en 9 heures, alors 1 jardinier mettra 6 fois plus de temps.
> Donc 9 x 6 = 54 heures.
> 7 jardiniers mettront 7 fois moins de temps donc 54 / 7 = 7,7 heures.
> Soit 7 heures + $\frac{7}{10}$ d'heure = 7 heures 42.
> 9 jardiniers mettront 9 fois moins de temps donc 54 / 9 = 6 heures.

Méthode 2 : proportionnalité des inverses

• Utiliser le fait que si deux suite de nombres A et B sont inversement proportionnelles, alors les suites A et $\frac{1}{\mathrm{B}}$ sont proportionnelles.
• Cette méthode revient à résoudre un problème de 4e proportionnelle.

Méthode 3 : produit constant

• Dans deux suites A et B inversement proportionnelles, le produit de A par B a une valeur constante :

x_{i}	x_{ii}
y_{i}	y_{ii}

Dans ce tableau, $x_{\mathrm{i}} \times y_{\mathrm{i}}$ est toujours égal à $x_{\mathrm{ii}} \times y_{\mathrm{ii}}$
Par conséquent, $y_{\mathrm{ii}} = (x_{\mathrm{i}} \times y_{\mathrm{i}}) \div x_{\mathrm{ii}}$