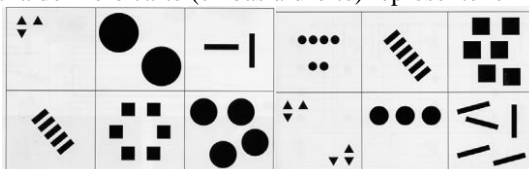


Corrigé du TD de didactique de la numération

Exercice 1 : la numération à l'école maternelle - La bataille

Un enseignant propose un jeu de bataille à ses élèves de maternelle.

Il utilise un jeu de cartes représentant les nombres de 1 à 6. Voici douze cartes extraites du jeu : par exemple, la première carte (en haut à gauche) représente le nombre 3 et la dernière carte (en bas à droite) représente le nombre 5.



« Vers les maths, Maternelle moyenne section » p 130 et 131, Edition ACCES, 2009.

1. Citer deux compétences mathématiques travaillées par les élèves lors de ce jeu de bataille.

Première compétence : savoir dénombrer une petite quantité (de un à six), c'est à dire indiquer le cardinal de la collection de symboles sur la carte (soit combien elle comporte d'objets).

Deuxième compétence : savoir comparer deux nombres (savoir que 6 c'est plus que 4, ou que 4 c'est plus que 3).

2. Pour chaque compétence citée en réponse à la question 1., donner deux causes possibles d'erreurs.

- Deux causes d'erreurs possibles pour le dénombrement :

- Erreur d'énumération : si l'élève compte les dessins figurant sur la carte un à un, il peut en oublier un, ou prendre en compte deux fois le même.

- Erreur liée à une méconnaissance de la comptine numérique (chaîne numérique non stable) : l'élève peut par exemple dire « un, deux, trois, quatre, six ».

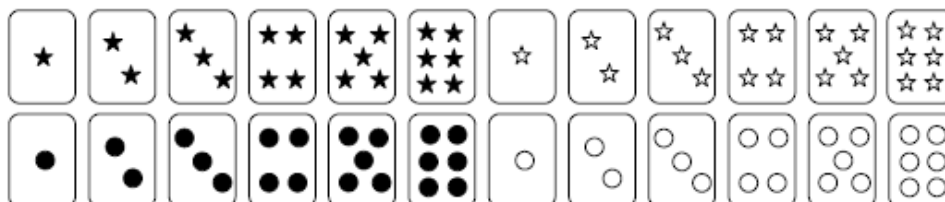
- Deux causes d'erreurs possibles pour la comparaison :

- La taille des objets peut causer des erreurs, par exemple un élève peut juger que les 6 carrés de la rangée du haut, c'est plus que les 6 carrés de la rangée du bas parce qu'ils sont plus grands.

- La disposition des éléments peut également causer des erreurs, par exemple les deux dispositions de 5 et 6 rectangles suivant une diagonales de la carte peuvent être perçues comme identiques.

Remarque : les erreurs de comparaison peuvent également être une conséquence d'erreurs de dénombrement.

3. L'enseignant peut utiliser un autre jeu de cartes représenté ci-dessous :



Comparer les intérêts respectifs de chacun des jeux au regard des deux compétences citées en réponse à la question 1.

Le deuxième jeu de carte présente deux différences essentielles par rapport au premier :

- Les éléments de chaque carte ont tous des dimensions à peu près identiques.
- Ces éléments sont disposés en constellation du dé ordinaire.

- Intérêt concernant le dénombrement.

Dans le deuxième jeu, on peut déterminer le nombre d'éléments d'une carte en reconnaissant la configuration : « c'est comme le 5 du dé ». Si les nombres correspondants aux constellations du dé est connu de l'élève, le dénombrement par comptage des éléments n'est pas nécessaire alors qu'il l'est pour certaines cartes du premier jeu. De ce point de vue, les deux jeux sont complémentaires car les deux types de dénombrement sont utiles.

- Intérêt concernant la comparaison des quantités.

Le deuxième jeu permet d'observer des décompositions des nombres : cinq est par exemple formé avec la configuration quatre à laquelle on rajoute un point au centre. 5 c'est 4 et encore 1, c'est plus que 4. Ce type de remarque est favorable aux débuts du calcul. Dans le premier jeu, on sera plutôt conduit à mettre en évidence que si on poursuit la comptine plus loin, il y a plus d'objets : cinq c'est plus que trois parce que cinq est après trois dans la comptine.

Cette compétence est également utile et les deux jeux sont là encore complémentaires.

La taille variable des éléments dans le jeu n°1 présente l'intérêt (si le maître procède ensuite à une verbalisation des procédures de comparaison) de faire comprendre le *principe d'abstraction*, c'est-à-dire que le nombre est indépendant de la taille des objets d'une collection.

Exercice 2 : la numération à l'école maternelle – Les cartes

Le document présenté en **annexe 1** est construit à partir d'un exercice extrait d'un guide d'aide à l'évaluation des élèves, édité par le Ministère de l'Éducation Nationale. Il est suivi des productions de deux élèves, en **annexe 2**.

Utiliser ces documents pour répondre aux questions suivantes :

1. En se référant aux Instructions Officielles, dire dans quel(s) cycle(s) et en quelle année de ce(s) cycle(s) cette activité peut être proposée.

Cet exercice peut être proposé en cycle 1, sans doute en GS, éventuellement en fin de MS, ou en cycle 2, éventuellement en début de CP.

C'est dans le programme de l'école maternelle que l'on peut trouver, dans "Approche du nombre" des justificatifs à ce type d'activité :

L'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité.

À la fin de l'école maternelle l'enfant est capable de :

- comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités (extraits du programme de 2008)

Remarque : pour répondre à cette question, il vaut mieux avoir analysé d'abord la tâche demandée à l'élève dans cet exercice d'évaluation, et donc avoir examiné les questions suivantes.

2. Citer deux objectifs relatifs au(x) champ(s) disciplinaire(s) et une compétence transversale.

Objectifs relatifs au champ mathématique :

- être capable de comparer 2 collections de croix dessinées dans une carte rectangle, en utilisant le nombre ou la correspondance terme à terme.

- être capable de modifier une collection pour la rendre équipotente à une collection donnée.

On peut aussi ajouter : comprendre les notions de « autant » « il en manque » « il y en a trop » qui participent à l'élaboration du concept de nombre.

Compétence transversale :

- savoir s'organiser dans une activité complexe : ici, il faut comparer successivement 9 cartes à une carte de référence ; il ne faut pas « perdre le fil » (oublier une carte ou bien comparer deux cartes entre elles).

- Comprendre et respecter une consigne (dessiner ou barrer des croix).

- Fixer son attention, se concentrer sur une tâche, savoir observer.

- Se situer dans l'espace limité de la carte rectangle (pour l'observation de chacune d'elles).

3. Citer deux procédures différentes que des élèves peuvent mettre en œuvre pour réaliser la tâche demandée.

- l'élève peut avoir recours au nombre (c'est la procédure experte) : il doit dans ce cas, dénombrer les croix de la carte modèle, puis compléter les cartes proposées afin d'obtenir le même nombre de croix (ou éventuellement barrer).

- l'élève peut utiliser la disposition spatiale des croix pour reproduire « le même motif ». Il s'agit cette fois d'une procédure non numérique. Cette procédure est envisageable pour toutes les cartes sauf pour les deux dernières cartes de la dernière colonne pour lesquelles les dispositions spatiales ne permettent pas d'établir la comparaison avec la carte modèle.

- l'élève peut aussi utiliser les doigts de sa main (utilisation d'une collection-témoin) pour faire de la correspondance terme à terme puisque la carte modèle compte 5 croix.

4. a. Analyser la production de Pierre. Émettre des hypothèses quant à la procédure mise en œuvre.

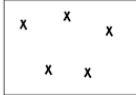
Les cartes de Pierre ont toutes 6 croix et de plus, il a barré la carte qui avait plus de 6 croix, au lieu de respecter la consigne en barrant 1 croix pour réaliser la carte demandée.

On peut faire plusieurs hypothèses au sujet des erreurs de Pierre :

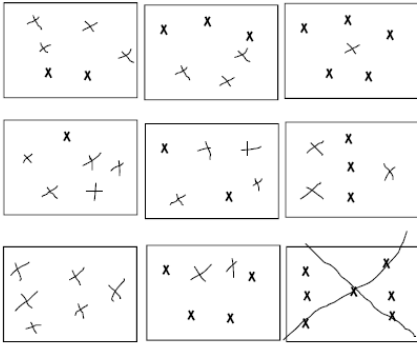
- il peut avoir dénombré la carte référence ; en se trompant, il a trouvé 6 au lieu de 5 ; puis il a successivement examiné les 9 cartes proposées, en comparant leur nombre de croix à 6 ; le fait qu'il n'ait pas reconnu la carte n°3, identique au modèle, peut montrer qu'il n'a pas contrôlé son travail par comparaison des cartes avec le modèle, mais qu'il a utilisé uniquement le nombre 6. On peut supposer qu'il a fait au départ une erreur de comptage (erreur dans la comptine, ou dans l'énumération de la collection) ;

- il est également possible qu'il peine à mémoriser le nombre de croix sur la carte modèle et qu'il soit obligé de recompter, à chaque fois ou presque, combien de croix il doit faire (soit 5). Puis, par exemple pour la case en haut à gauche, il compte qu'il y en a 2, puis surcompte à partir de 2 (alors qu'il devrait le faire à partir de 3) : 2, 3, 4, 5, ce qui fait qu'il trace 4 croix, soit en tout une carte à 6 croix. Cette procédure erronée peut également expliquer la carte qui a déjà 5 croix : il dit 5, trace 1 croix et s'arrête. Il

Regarde cette carte ; on y a dessiné des croix.



Toutes ces cartes doivent avoir autant de croix que la carte ci-dessus.



Tu peux dessiner des croix s'il en manque.
Tu peux aussi barrer des croix s'il y en a trop.

barre la carte pour laquelle le surcomptage ne fonctionne pas. En revanche, cette seconde hypothèse ne permet pas d'expliquer pourquoi il a mis 6 croix (au lieu de 5) dans le rectangle vide, en bas à gauche.

- il peut également n'avoir pris en compte qu'une partie de la consigne : « toutes ces cartes doivent avoir autant de croix », oubliant la fin de la phrase « que la carte ci-dessus ». Est-ce qu'il oublie la carte du dessus, est-ce que pour lui c'est un modèle de remplissage sans être un modèle relativement à la quantité ? Est-ce que l'expression « ci-dessus » est comprise comme « les croix sont dessus les cartes » ? Il part sur la quantité de 6, quantité choisie par lui de façon arbitraire, et qu'il reprend pour chacune des cartes. Pierre semble avoir totalement oublié la carte modèle puisque la disposition spatiale n'est pas du tout reprise.

b. Pour Chloé, la consigne a-t-elle été rigoureusement respectée ? Commenter.

Les cartes proposées par Chloé correspondent bien aux consignes : elles ont toutes 5 croix.

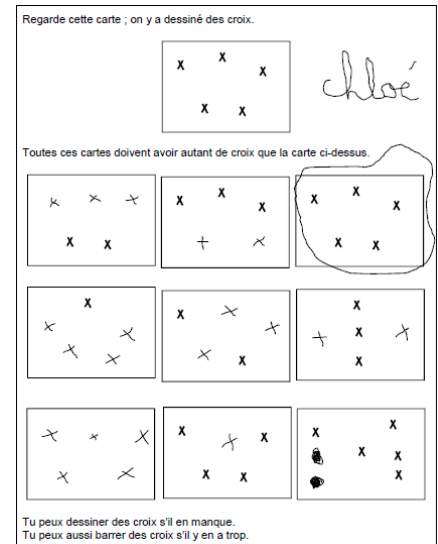
On ne peut pas savoir quelle stratégie a été mise en œuvre par Chloé. En revanche, certainement surprise par une carte sur laquelle elle n'avait rien à ajouter ni à barrer, Chloé a entouré cette carte (un peu comme si la consigne avait été « entoure la carte qui contient autant de croix que le modèle »). Cette consigne n'était pas donnée : sur ce point, elle n'a pas respecté rigoureusement la consigne.

5. La présentation de l'activité comme la formulation des consignes occultent "cinq" et "5". Pourquoi ?

La donnée des termes "cinq" ou "5" aurait pour conséquence d'attirer fortement l'attention de l'élève sur le nombre de croix et ainsi de l'inciter à utiliser ce nombre pour résoudre l'exercice.

Or cet exercice permet des résolutions non numériques : reconnaissance du dessin formé par les croix dessinées dans la carte rectangle (disposition spatiale), ou correspondance terme à terme, (ou paquets à paquets). On peut donc penser que l'auteur de l'exercice n'a pas voulu éliminer ces procédures.

D'autre part, même dans le cas de procédures numériques (perception globale ou dénombrement), l'auteur a pu préférer que ce soit l'élève lui-même qui se rende compte que le nombre peut être utile ici.



Exercice 3 : la numération à l'école maternelle – Le car

Cet exercice porte sur la situation « le car ».

1. Quelle est la principale compétence mise en jeu dans cette situation ?

La principale compétence mise en œuvre dans cette activité est de **savoir dénombrer une collection en utilisant la suite orale des nombres connus**. La mise en œuvre de cette compétence suppose que l'élève ait compris que les nombres permettent de représenter une quantité (sens cardinal du nombre). Une seconde compétence essentielle travaillée est celle qui consiste à constituer une collection de cardinal donné.

Remarque : L'activité « le car » est un problème de commande. Les élèves doivent utiliser les nombres pour mémoriser une quantité. Le nombre et la disposition des places vides rendent l'utilisation du comptage nécessaire.

2. À quel(s) niveau(x) peut-on la proposer ?

On peut lire dans les programmes de maternelle :

L'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets.

À la fin de l'école maternelle l'enfant est capable de :

- comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités ;
- dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus.

Cette activité demande principalement de savoir dénombrer des collections de petite taille (autour de la dizaine). Elle ne peut donc **pas être proposée au-delà du début du CP**.

Elle présente les caractéristiques suivantes :

- Activité vécue : les élèves doivent aller chercher les objets
- Travail sur des objets réels (manipulations de jetons)
- Pas d'utilisation de l'écrit
- Dispositif très élaboré (nécessité de se déplacer, phase de validation, ...) destiné à rendre obligatoire l'utilisation des nombres (du comptage) pour résoudre un problème de quantités.

Ce dernier point montre (et les dialogues le confirment) que l'activité est conçue pour des élèves qui ne maîtrisent pas nécessairement la notion de quantité, c'est-à-dire qui n'ont pas compris qu'en comptant les places vides et en comptant le même nombre de jetons, il y aura exactement un jeton par place vide.

On peut donc proposer cette activité **en cycle 1, en maternelle grande section** (la taille des collections est trop importante pour une moyenne section).

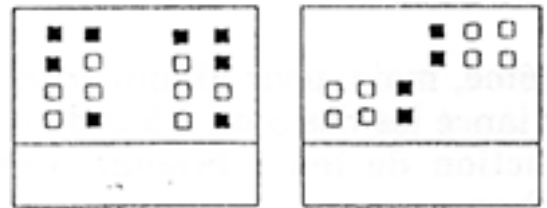
3. a. Indiquer les procédures des élèves (justes ou erronées) que l'enseignant est susceptible d'observer. S'appuyer sur les exemples de fonds proposés en annexe 1.

⊙ **Procédure erronée** : Pour aller chercher la quantité voulue de voyageurs les élèves commenceront souvent par estimer visuellement la quantité (beaucoup, pas beaucoup) et par prendre plus de voyageurs que ce qui est nécessaire de façon à être certains de pouvoir remplir toutes les places vides. Mais cette procédure sera rapidement abandonnée car elle ne respecte pas la consigne : « juste ce qu'il faut, pas plus, pas moins ».

⊙ **La procédure visée est de dénombrer les places vides par comptage un à un, de mémoriser le nombre obtenu, puis de compter les voyageurs un à un.**

⊙ D'autres procédures sont possibles qui dépendent du fond choisi :

Par exemple, dans le cas où il manque 8 voyageurs : un élève peut reconnaître visuellement la constellation « quatre », et retenir qu'il faut « quatre et encore quatre jetons ». Il peut aussi représenter la quantité de jetons sur ses doigts (collection-témoin).



3. b. Pourquoi le maître ne demande-t-il pas « combien de jetons dois-tu aller chercher » ? Ou encore : « quel est le nombre de jetons que tu dois aller chercher ? »

Pour que la situation fonctionne, l'enseignant ne doit pas, dans la consigne, prononcer les mots « nombre » ou « compter », ce qui induirait des procédures et **l'objectif est justement que l'élève prenne conscience lui-même que le nombre est utile pour mémoriser une quantité.**

L'élève doit bien comprendre le but de l'activité : remplir le car, mais l'enjeu d'apprentissage lui est caché, à savoir utiliser le nombre pour mémoriser une quantité.

3. c. Préciser trois variables de la situation sur lesquels le maître peut agir pour bloquer ou provoquer une procédure particulière.

Les variables de la situation que le maître peut utiliser pour bloquer ou favoriser une procédure particulière (les variables didactiques) :

- **la taille des collections** (le cinquième fond proposé rend difficile l'utilisation des doigts)
- **la disposition des places vides** (reconnaissance visuelle impossible)
- **l'éloignement de la réserve de jetons**
- **les contraintes « en un seul voyage », « juste ce qu'il faut »** (rendent impossible une procédure par essais-erreurs ou par approximation)

En jouant sur ces paramètres, le maître peut rendre nécessaire l'utilisation des nombres et du comptage.

4. a. Identifier dans chacun des deux dialogues, la nature des procédures de validation mises en œuvre par les élèves.

- « Émeline va les chercher et les pose sur le quai ; un enfant recompte les places libres et ensuite les voyageurs. » : le double-comptage est un moyen pertinent de validation pour un élève qui a compris que si le dernier mot-nombre prononcé est le même, il y a autant de jetons que de places libres.
- « Place les voyageurs » : mettre les jetons dans les places libres est un moyen pratique de validation suggéré par le maître (et qui ne nécessite pas que l'élève maîtrise encore le comptage)
- « Un enfant dispose les voyageurs sur le quai en reproduisant la configuration des places libres » : cet élève effectue ainsi une correspondance terme à terme implicite entre les places libres et les jetons : c'est une procédure pertinente de validation (qui ne nécessite pas non plus l'utilisation du comptage).

4. b. Comment peut-on expliquer le fait qu'au cours du dialogue 1, l'enfant ne semble pas convaincu ?

Cet élève n'a pas compris qu'un nombre représente une quantité. Pour lui, la comptine est une suite de mots qui n'a sans doute pas beaucoup de signification. On peut remarquer qu'il n'est pas capable d'extraire le dernier mot prononcé lors du comptage et de le considérer comme le résultat du comptage.

→ Rappel du principe cardinal : « il consiste à conclure que le dernier mot de la suite utilisée au cours d'un comptage désigne le cardinal de l'ensemble des objets comptés ». (Voir CM)

Il est vraisemblable que l'action de comptage connue par l'élève revienne à attribuer un numéro à chaque objet.

Cet élève ne sait pas comparer des collections (ici les places libres et les voyageurs) contenant des objets différents du point de vue de leur quantité. La situation rencontrée ne se traduit pas encore pour lui par « il y en a autant ».

5. *Quelle est la fonction du quai ? Comment les élèves peuvent-ils l'utiliser ?*

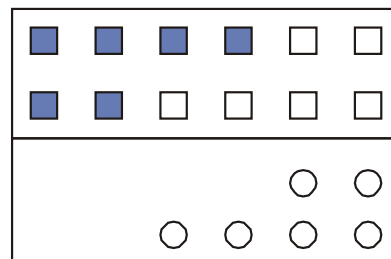
Un élève du groupe doit revenir avec une quantité de voyageurs. Le fait de faire attendre tous les voyageurs sur le quai avant de les faire monter dans le car, **oblige les élèves à vérifier que les deux collections, des places vides et des voyageurs, sont équipotentes.**

Cette contrainte de la situation favorise le passage vers l'utilisation du nombre en tant que cardinal.

Extrait du dialogue 2 : « Un enfant dispose les voyageurs sur le quai en reproduisant la configuration des places libres ».

→ Un élève effectue ainsi une correspondance terme à terme, les quantités égales sont alors reconnues grâce à une même disposition spatiale.

→ Un autre élève utilise la désignation par le doigt et par le regard entre les places libres et les voyageurs : c'est aussi une procédure pertinente de validation.



Exercice 4 : la numération au cycle 2 – Les cartes à points et le Ziglotron

I- Analyse de la séquence extraite de Mille maths CP

1- Dans l'activité « Décomposer en utilisant 10 » de l'**annexe 4**, les auteurs souhaitent que les élèves ne comptent pas les points un à un, mais comptent d'abord les « dix ». Quelles compétences les élèves doivent-ils maîtriser pour utiliser la procédure souhaitée ?

Les compétences que les élèves doivent maîtriser sont :

- associer le « dix » au nombre « 10 », c'est-à-dire comprendre qu'une carte indiquant « dix » représente une collection de dix points (qu'en principe ils ne voient pas) et que cela dispense de compter effectivement les points un à un, tout en permettant d'obtenir le même nombre au final.
- savoir compter de dix en dix (à partir de 0) : on compte dix, vingt avant « d'ajouter » les unités.
- pour produire les écritures souhaitées, savoir associer le comptage de dix en dix et l'utilisation du symbole + (c'est-à-dire savoir que $10+10=20$ c'est pareil que compter 10 puis 20, ou encore que $20+1$ c'est le nombre qui suit 20, donc 21).

2- Dans l'activité « Dénombrer des collections » (**annexe 4**), les auteurs évoquent les difficultés que rencontrent des élèves pour dénombrer correctement des collections importantes. Citez deux difficultés que peuvent rencontrer des élèves de CP pour trouver le nombre d'objets. (Les difficultés liées à la production de l'écriture en chiffres ne sont pas demandées).

Pour des élèves de CP le champ numérique du programme sont les nombres entiers de 0 à 100. Pour dénombrer des collections de ces ordres de grandeurs, on peut rencontrer :

- des difficultés à compter une fois et une seule chaque élément de la collection, à penser à séparer les objets déjà comptés des objets encore à compter ;
- des difficultés d'ordre stable dans la comptine numérique au-delà d'une certaine limite : grands nombres pas suffisamment pratiqués, blocages aux changements de dizaines, difficultés à nommer les nombres des dizaines 70, 80 et 90.

3- Cette question porte sur l'**annexe 5**. L'objectif annoncé en haut et à droite de la fiche est formulé ainsi : « Comprendre l'intérêt de grouper par 10 pour compter des objets. » Les exercices proposés dans cette page du fichier correspondent-ils à cet objectif ? Justifier votre réponse.

Ces exercices ne portent pas sur l'intérêt de grouper par 10 puisque les groupements par dix sont déjà effectués, sous forme de boîtes, de billets ou de sachets de dix. Il s'agit dans ces trois exercices de déterminer un nombre donné sous la forme d'une décomposition en paquets de 10 et d'unités, donc il s'agit de compter en groupant par 10. On peut noter que l'exercice inverse n'est pas proposé dans cette page : il s'agirait de proposer un groupement par dix d'un nombre donné.

Autre réponse possible : on peut considérer que les exercices correspondent à cet objectif, parce que le fait que les collections soient pré-groupées facilite le dénombrement en permettant le comptage de dix en dix" (il est intéressant de noter que le comptage un à un est rendu possible par la présence d'une boîte ouverte).

II- Analyse de la séquence extraite de Cap maths CP

4- Décrire deux stratégies que les élèves acheteurs peuvent utiliser pour réussir les commandes dans la séance 1. Préciser les connaissances mises en œuvre pour chacune de ces stratégies. On rappelle que dans la séance 1, les bons de commande ne sont pas

utilisés.

Pour réussir, il leur suffit de compter correctement le nombre de boutons, ce nombre étant ensuite transmis oralement. Ils peuvent :

- compter de 1 en 1 (en les marquant par exemple d'une croix au fur et à mesure sur le robot pour en faciliter l'énumération) et demander le nombre correspondant de boutons à l'unité ; ils utilisent alors leurs connaissances sur la comptine numérique et le comptage-dénombrement un par un où le dernier mot-nombre prononcé correspond au cardinal de la collection ;
- compter en regroupant par 10 (en entourant par exemple les groupes de 10 boutons sur le Ziglotron) et s'arrêter quand ils ne peuvent plus faire de paquets. Ils comptent alors le nombre de paquets et le nombre d'unités restantes. Il n'est pas nécessaire ici de faire le lien avec le nombre total de boutons ;
- commencer par compter des paquets de 10, puis quand il n'y a plus trop de boutons (moins de 15 ou 20, le plus trop n'étant qu'intuitif), compter le reste un par un. Ils utilisent alors la comptine un peu plus loin que pour la stratégie précédente. La commande passée comportera un nombre de paquets de 10 non maximal et un nombre de boutons isolés pouvant dépasser la dizaine.
- compter de 1 en 1 mais faire une commande en décomposant le nombre obtenu en dizaines et unités ; ils utilisent alors déjà la connaissance qui va être travaillée dans les séances suivantes, mais peut-être de manière intuitive, ou grâce à des apprentissages extérieurs à la classe.

5- Dans la séance 2, préciser l'intérêt de chacune des trois premières contraintes par rapport à l'apprentissage visé.

- Écrire le nombre total trouvé et la commande va permettre de visualiser le lien entre l'écriture chiffrée des nombres et leur décomposition en paquets de 10 et unités isolées.
- N'avoir droit qu'à un maximum de 10 boutons isolés est le seul moyen de faire apparaître l'écriture du nombre en base 10. Le nombre de groupements de dix est alors maximum et l'élève ne peut plus utiliser la 3^{ème} stratégie présentée ci-dessus.
- Si les marchands lisent la commande écrite, ils doivent pour la valider accepter la décomposition du nombre qui leur est proposée. Ainsi, ils travaillent eux-aussi les groupements par dix.

6- Dans la séance 3 :

a. Pourquoi les auteurs proposent-ils que seul l'enseignant soit en possession du Ziglotron ?

On est en phase de décontextualisation : le Ziglotron reste un support à la réflexion mais petit-à-petit l'élève s'en détache pour ne plus travailler que sur les nombres. Le but n'est plus de trouver le bon nombre de boutons mais de décomposer un grand nombre en utilisant les groupements de 10. Néanmoins sa présence sera utile pour une validation ultérieure, utilisant de nouveau le matériel.

b. Donner trois procédures correctes que les élèves peuvent utiliser pour répondre à la question posée.

- Dessiner les 42 boutons (ou 42 bâtons) et les grouper par dix pour obtenir le nombre de dizaines et le reste, donc le nombre d'unités ;
- Décomposer 42 sous la forme $10 + 10 + 10 + 10 + 2$ en contrôlant chaque étape de la décomposition puis exploiter cette écriture pour compléter le bon ;
- Compter 42 sur les doigts et retenir un paquet de dix (ou le noter) chaque fois qu'on a déplié dix doigts ;
- Utiliser ce qu'ils ont compris dans la séance précédente : le premier chiffre du nombre est le nombre de paquets de 10, le deuxième le nombre de boutons isolés.

III- Synthèse

Analyse comparative des modalités utilisées pour provoquer l'apprentissage du rôle des chiffres selon leur place dans le nombre.

Les modalités ne s'appuient pas sur la même conception d'un apprentissage.

Dans la séquence extraite de Mille maths les auteurs montrent d'abord les connaissances numériques que les enfants devront apprendre (par le biais de la bande numérique et des consignes à respecter, par la répétition de la même tâche proposée au paragraphe 2 de l'annexe 1 pour tous les nombres de 20 à 30, ce qui peut se traduire par l'expression « enfoncer le clou »). Les auteurs leur demandent ensuite d'appliquer ces connaissances dans les exercices de la page « utiliser la dizaine ». Cette séquence correspond de fait à une démarche d'apprentissage par ostension, ou de transmission des savoirs.

Dans la séquence extraite de Cap maths les auteurs ont privilégié une démarche d'apprentissage par la résolution de problèmes, dans laquelle les élèves sont davantage acteurs et responsabilisés : ils doivent découvrir eux-mêmes la relation entre l'écriture chiffrée des nombres et la signification de chacun des chiffres de cette écriture. Le savoir visé est la solution d'une situation problème qu'ils ont à résoudre.

Exercice 5 : La numération décimale au cycle 2 – Les timbres

Un maître donne l'exercice d'évaluation suivant, à la fin du premier trimestre, à sa classe de CE2.

*Les timbres sont vendus par carnets de 10.
Combien de carnets faut-il acheter pour timbrer 254 enveloppes ?*

1. Quelle est la notion mathématique sous-jacente ?

Même s'il s'agit d'une situation de division (quotient par excès), diviser 254 par 10, revient à chercher le nombre de dizaines de 254, ce qui fait de cet exercice un exercice de numération.

2. En annexe 8 sont proposées cinq productions d'élèves. Analyser ces cinq productions :

- par rapport au calcul et à la stratégie de résolution utilisés ;
- par rapport à l'expression de la réponse ;
- par rapport aux savoirs engagés, aux erreurs et aux manques.

	calcul et stratégie de résolution	expression de la réponse	savoirs, erreurs et manques
Sonia	Elle décompose 200 sous la forme 20×10 , puis décompose 54 additivement en dizaines et unités. Elle effectue ensuite un comptage des dizaines en s'appuyant sur ces deux décompositions.	S. donne une réponse en rapport avec la question posée: le nombre qu'elle propose (74) représente bien le nombre de carnets nécessaires même si le comptage est erroné.	L'écriture $200 = 20 \times 10$, avec le nombre 20 indiqué au-dessous, montre que S. a bien compté 20 paquets de dix. En revanche, lorsqu'elle compte les paquets de dix présents dans 54, elle compte les unités au lieu de compter des paquets de dix. Cette erreur est fréquente au cycle 2 lorsqu'il y a un changement d'unité : ici l'unité n'est plus l'enveloppe mais le paquet de 10 enveloppes.
Aurélien	A. décompose 100 en somme de 10, multiplie la décomposition par 2, puis décompose 54 en 5 carnets de 10 et 4 timbres.	Ne répond pas à la question posée : elle exprime le nombre de timbres en carnets et en timbres (25 carnets plus 4 timbres).	A. ne maîtrise pas bien la numération au-delà de 100 : elle ne sait pas donner directement le nombre de dizaines contenues dans 200. On remarque une étourderie dans le comptage de 10 en 10 (le nombre 70 qui montre un total partiel qu'a réalisé A.)
Hélène	H. décompose 254 en $200 + 54$ et associe directement le nombre de carnets correspondant à chaque terme de la somme.	H. donne la bonne réponse et la met en évidence en l'entourant.	H. s'appuie vraisemblablement sur la numération (200 c'est 2 fois 10 paquets de 10, c'est 20 paquets de 10). Elle comprend qu'il faut 6 carnets pour contenir les 54 timbres et indique même les timbres restants (6t signifiant 6 timbres)
Laurent	L. procède par addition de carnets de timbres jusqu'à obtenir le nombre de timbres voulu.	L. n'écrit pas la réponse (son calcul lui permettrait pourtant de la donner).	L. procède de manière pratique. comme le ferait un commerçant. Il explique comment obtenir 254 timbres avec des carnets de 10.
Jean	J. décompose 254 en $200 + 50 + 4$ et indique le nombre de carnets qui correspond à chaque terme.	J. ne répond pas à la question ; il a cependant bien compris qu'il faut 26 carnets puisqu'il indique que pour les 4 derniers timbres, il faut 1 carnet.	J. n'utilise pas d'écritures additives ou multiplicatives mais maîtrise assez bien la numération puisqu'il sait trouver directement le nombre de dizaines contenues dans 200 et dans 50. Comme Hélène, il indique le nombre de timbres non utilisés (6).

3. Au vu de l'analyse des productions de ces élèves, pensez-vous que ceux-ci maîtrisent la numération décimale au niveau attendu pour cette classe ?

Aucun élève ne maîtrise suffisamment notre système de numération positionnel pour déduire directement le nombre de dizaines de 254 à partir de l'écriture chiffrée. Certains élèves s'appuient sur les écritures numériques (additives, multiplicatives), les autres sur des écritures non mathématiques ("pour faire 200", 10 carnets de 10" ...). Cependant, sous des formes différentes, tous les élèves passent par la décomposition en centaines et dizaines (numération) ; aucun élève n'utilise une opération (division).

Exercice 6 : La numération décimale au cycle 3 – Les grands nombres

Cette question prend appui sur les documents proposés en **annexe 9**, qui constituent des exercices proposés à des élèves de cycle 3.

1. Les exercices proposés à l'annexe 9 se présentent sous différentes formes et sont de complexité variable, mais ils sollicitent tous une même connaissance mathématique. Laquelle ?

Les quatre exercices ont pour point commun de mettre en jeu la signification de chaque chiffre selon sa position dans l'écriture d'un nombre en numération décimale. Plus précisément, ces quatre exercices nécessitent de savoir faire le lien, dans les deux sens, entre d'une part l'écriture chiffrée d'un nombre, et d'autre part, le chiffre de unités, des dizaines, des centaines... ainsi le nombre de dizaines, de centaines.. de ce nombre (cette dernière compétence étant plus difficile à acquérir que la précédente).

2. Faire les exercices.**Exercice 1**

Observe l'exemple et complète de même.

Dans 3621 : 2 est le chiffre des dizaines et 362 est le nombre de dizaines

Dans 7214 : 2 est le chiffre des centaines et 72 est le nombre de centaines

Dans 5068 : 8 est le chiffre des unités et 5068 est le nombre d'unités

Dans 8621 : 2 est le chiffre des dizaines et 862 est le nombre des dizaines

Exercice 2

Retrouve les chiffres masqués.

398 : le chiffre des dizaines est plus grand que celui des unités :

325 : il y a 32 dizaines dans ce nombre

936 : le chiffre des unités est double de celui des dizaines.

le chiffre des centaines est égal à la somme des deux autres chiffres

235 : il y a 23 dizaines dans ce nombre

le chiffre des unités est égal à la somme des deux autres chiffres

Exercice 3

- Mon nombre de milliers est 572. Mon chiffre des centaines est le même que celui des dizaines de mille et mon chiffre des dizaines est le même que celui des milliers. Mon chiffre des unités est égal au chiffre des centaines de mille plus 1.

Je suis :

572 726

- Mon nombre de milliers est 86. Si on m'ajoute 1, mon chiffre des milliers augmente de 1.

Je suis :

8699

- Je suis un nombre compris entre un millier et un million.

Mon nombre de chiffres est impair et je suis écrit uniquement avec les chiffres 4 et 9.

Si on m'ajoute 1, tous mes chiffres changent.

Je suis :

49999

Exercice 4

Voici des nombres :

50 267

6 074

20 681

48 607

40 596

1 740 325

740 634

40 000

320 978

206 000

740 000

520 630

7 208 158

697

20 600

Recopie les nombres qui ont :

- 6 pour chiffre de centaines : 20 681 ; 48 607 ; 740 634 ; 520 630 697 ; 20 600
- 206 pour nombre de centaines : 20 600 ; 20681
- 0 pour chiffre des milliers : 50 267 ; 20 681 ; 40 596 ; 1 740 325 ; 740 634 ; 40 000 ; 320 978 ; 740 000 ; 520 630 ; 20 600
- 40 pour nombre de milliers : 40 000 ; 40 596
- 740 pour nombre de milliers : 740 000 ; 740 634

Remarque : Dans les exercices ayant trait à la didactique, il est important (même si ce n'est pas explicitement demandé) de faire soi-même les exercices destinés aux élèves. Cela permet de mieux analyser la tâche de l'élève et de mieux évaluer les difficultés éventuelles.

3. Ranger ces exercices par ordre de difficulté croissante. Justifier ce choix.

- L'exercice 1 est le plus facile. Il suffit d'appliquer les mécanismes (découpage en tranche de trois chiffres, utilisation d'un tableau de numération...) qui permettent d'identifier chaque chiffre de l'écriture d'un nombre ou de déterminer le nombre de dizaines, centaines... Un exemple permet de mieux comprendre la consigne. Les nombres n'ont que 4 chiffres. Les questions portent sur :
 - les chiffres des unités, des dizaines et des centaines
 - Les nombres d'unités, de dizaines et de centaines.
- L'exercice 4 est un peu plus difficile que l'exercice 1. Il n'y a pas d'exemple, cinq nombres ont jusqu'à 7 chiffres et n'ont pas tous la même taille. Les questions portent sur:
 - les chiffres des centaines et des milliers
 - les nombres de centaines et de milliers.

De plus, l'exercice ne se limite pas tout à fait à l'application de mécanismes, il faut chercher dans une liste tous les nombres qui conviennent. Cependant, le fait que les nombres de centaines ou de milliers à identifier soient donnés (206, 40, 740) facilite la tâche car il ne reste plus qu'à chercher ces séquences de chiffres et à vérifier qu'elles sont à la bonne place dans l'écriture des nombres.

- L'exercice 2 est plus difficile que les deux précédents. Il ne suffit plus d'appliquer des mécanismes, il faut faire un raisonnement qui prenne en compte l'écriture chiffrée incomplète et les informations données dans le texte de l'énoncé. Contrairement aux deux exercices précédents, pour deux des nombres à trouver, les élèves doivent reconstruire l'écriture du nombre à partir de son nombre de dizaines. Cependant les nombres sont tous de trois chiffres et leurs écritures incomplètes sont données. Les informations portent davantage sur les chiffres des unités, dizaines..., que sur les nombres d'unités, dizaines...
- L'exercice 3 est le plus difficile. Chaque question constitue un véritable problème de recherche et se résout en plusieurs étapes. Les élèves peuvent faire des hypothèses en s'appuyant sur les contraintes de l'énoncé puis les tester. Par exemple un élève, pour l'énigme 3, peut émettre l'hypothèse que le nombre cherché est 4 999 999, puis trouve finalement 49 999. Cet exercice met en jeu de nombreuses connaissances, notamment une bonne maîtrise du fonctionnement de la retenue de l'addition. Il nécessite une grande maîtrise des grands nombres. Par exemple, pour l'énigme 2, un élève peut raisonner ainsi : « Comme le nombre de milliers est 86, c'est dans les 86 mille et pour passer à 87 mille, il faut être au maximum des 86 mille, c'est donc 86 999 ». Il devra aussi d'être capable de schématiser une situation, par exemple, pour l'énigme 1, les élèves doivent d'abord construire, éventuellement mentalement une écriture chiffrée incomplète du type « 572 - - - », puis rechercher les chiffres manquants. Enfin, c'est le seul exercice qui n'a pas de support visuel chiffré.
- En résumé l'ordre croissant de difficulté de ces exercices est 1, 4, 2 et 3.

Remarque : Il n'y a pas de réponse unique à une question de ce type. On pourrait proposer l'ordre croissant de difficulté de ces exercices 1, 2, 4 et 3, à condition d'en donner des arguments cohérents.

4. Indiquer trois caractéristiques de l'exercice 4 qui justifient l'intérêt de le proposer à des élèves du cycle 3.

L'intérêt de proposer cet exercice à des élèves de cycle 3 est multiple :

- les nombres sont de taille variée, de la classe des centaines à la classe des millions
- il fait travailler la signification des écritures en chiffres à travers la recherche du chiffre des centaines et des milliers et du nombre de centaines et de milliers
- les nombres choisis présentent de vraies difficultés et obligent les élèves à réfléchir. En voici trois exemples
 - les séquences de chiffres comme « 206 » sont présentes plusieurs fois, tantôt à la bonne place, tantôt à une place qui ne convient pas : l'élève ne peut pas se contenter d'une réponse superficielle
 - dans 1 740 325 on entend « sept cent quarante mille », mais le nombre de milliers n'est pas 740
 - dans la plupart des nombres proposés, il y a des zéros intercalés qui constituent toujours une difficulté.