Exercice 1 – Te mau numera maohi (les nombres maohi)

En polynésien (moderne), voici la liste des mots-nombres : *hô'ê, piti, toru, maha, pae, ono, hitu, va'u, iva, 'ahuru, 'ahuru ma hô'ê, 'ahuru ma piti, 'ahuru ma toru, 'ahuru ma maha, 'ahuru ma pae, 'ahuru ma ono, 'ahuru ma hitu, 'ahuru ma va'u, 'ahuru ma iva, E piti ahuru, E piti ahuru ma hô'ê... (la particule numérale "e" se place avant tous les nombres sauf Hô'ê et Aore (zéro), car "e" signifie "c'est" dans les prédicats numéraux)*

La numération tahitienne moderne est une numération importée, donc simplifiée et qui est intéressante à ce titre. Elle ressemble à la numération sino-japonaise. On dit « deux-dix et trois » pour 23 par exemple. C'est l'enjeu de l'exercice de comprendre cette façon de construire la suite de nombres, non abordée en CM.

1. Ecrire en polynésien les nombres 50, 700, 2014.

60 : E ono 'ahuru - 900 : E iva hânere - 2 014 : E piti tauatini 'ahuru ma maha

2. Quelles sont les particularités du système oral polynésien ?
Quelles différences peut-on faire avec le système français ?

Le système polynésien est un système reposant sur les groupements par 10. Il repose sur quelques mots-nombres : de un à dix, puis cent, mille, million, avec des mots de liaison. Il nécessite moins de mot que le système oral français qui possède en plus des noms particuliers pour les nombre de 11 à 16, et des noms particuliers pour les dizaines. La particularité en polynésien est de ne pas présenter ces irrégularités, le système oral est ainsi assez proche de la décomposition du système écrit. Cela peut avoir un avantage pour l'enseignement, et c'est utilisé par Rémi Brissiaud dans le manuel « j'apprends les maths CP » version TCHOU où un petit asiatique expose sa façon de dire les nombres.

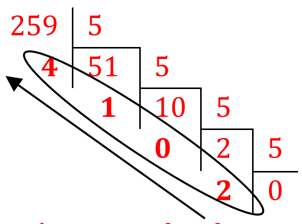
Le système oral français est par ailleurs assez complexe et pas exactement identique au système écrit (chiffres), on ne dit par deux-quatre-trois pour 243 comme le font parfois les anglais. Notre système oral est bâti sur les décompositions en base dix, avec des groupements par mille qui apparaissent pour simplifier la lecture des nombres. C'est pour rendre plus aisée la lecture qu'on groupe l'écriture des nombres par 3 chiffres.

Exercice 2 – Questions indépendantes sur le calcul dans diverses bases de numération

1. Ecrire chacun des nombres dans la base indiquée :

a. 259 en base 5 ; 43 981 en base 16

Pour écrire dans une base *b* donnée un nombre présenté sous forme décimale, on effectue des groupements de *b* unités, puis des groupements de *b* groupes de *b* unités, etc. A chaque opération, il peut rester des « orphelins, qui donneront le chiffre à écrire à son rang. Pour compter les groupements, il suffit de poser les divisions successives.



D'où $259 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 1 \times 5 + 4$ et donc $259 = \overline{2014}^{\,5}$

De même avec des divisions par 16 : $43\,981 = 10 \times 16^3 + 11 \times 13^2 + 12 \times 13^1 + 13 \times 13^0$

et donc : $43\,981 = \overline{(10)(11)(10)(13)}^{\,16}$ qu'on peut aussi noter : $43\,981 = \overline{ABCD}^{\,16}$

b. $(11244)_{cinq}$ en base 10 ; $(10754)_{neuf}$ en base 3 ; $(22102)_{trois}$ en base 9

Revenons à la définition pour résoudre cette question :

$(11244)_{cinq} = 1 \times 5^4 + 1 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 625 + 125 + 50 + 20 + 4 = 824$

Pour le suivant, on peut repasser par la base 10 ou jongler avec les puissances car :

$9 = 3^2$, $9^2 = 3^4$, $9^3 = 3^6$ et $9^4 = 3^8$.

On pourra aussi remarquer que : $7 = 2\times3 + 1$, $5 = 1\times3 + 2$ et $4 = 1\times3 + 1$.

$(10754)_{neuf} = 1 \times 9^4 + 0 \times 9^3 + 7 \times 9^2 + 5 \times 9^1 + 4 \times 9^0$

$= 1 \times 3^8 + 0 \times 3^6 + (2 \times 3 + 1) \times 3^4 + (1 \times 3 + 2) \times 3^2 + (1 \times 3 + 1) \times 3^0$

Ensuite, on développe

$= 1 \times 3^8 + 0 \times 3^6 + 2 \times 3^5 + 1 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^0$

Et on obtient le résultat attendu

$= (100211211)_{trois}$

$$\begin{aligned}(22102)_{\text{trois}} &= 2\times 3^4 + 2\times 3^3 \quad + 1\times 3^2 + 0\times 3^1 + 2\times 3^0\\ &= 2\times 9^2 + 2\times 3\times 9^1 + 1\times 9^1 + 0 \quad + 2\times 9^0\\ &= 2\times 9^2 + 7\times 9^1 + 2\times 9^0\\ &= (272)_{\text{neuf}}\end{aligned}$$

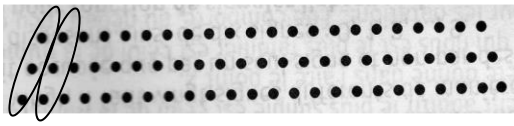
2. Donner le successeur et le prédécesseur des nombres suivants dans chacune des bases indiquées (on notera A, B etc. les chiffres au-delà de 9 dans les bases 13 et 11) : $(423)_{\text{cinq}}$; $(1000)_{\text{cinq}}$; $(233)_{\text{quatre}}$; $(10100)_{\text{deux}}$; $(1450)_{\text{treize}}$; $(999)_{\text{onze}}$; $(3333)_{\text{quatre}}$

Le prédécesseur et le successeur de chaque nombre sont, en notant A, B etc. les chiffres au-delà de 9 dans les bases 13 et 11 :

$(422)_{\text{cinq}}$	$(444)_{\text{cinq}}$	$(232)_{\text{quatre}}$	$(10011)_{\text{deux}}$	$(144C)_{\text{treize}}$	$(998)_{\text{onze}}$	$(3332)_{\text{quatre}}$
$(423)_{\text{cinq}}$	**$(1000)_{\text{cinq}}$**	**$(233)_{\text{quatre}}$**	**$(10100)_{\text{deux}}$**	**$(1450)_{\text{treize}}$**	**$(999)_{\text{onze}}$**	**$(3333)_{\text{quatre}}$**
$(424)_{\text{cinq}}$	$(1001)_{\text{cinq}}$	$(300)_{\text{quatre}}$	$(10101)_{\text{deux}}$	$(1451)_{\text{treize}}$	$(99A)_{\text{onze}}$	$(10000)_{\text{quatre}}$

3. a. Donner le cardinal de la collection de points ci-contre en base 3 et en base 10.

On trouve $(2120)_{\text{trois}}$ et 69 base 10.



b. Décrire deux procédures différentes (à votre niveau), permettant de répondre à la question précédente pour la base 3.

Procédure 1 : On peut grouper les points par 3 (la disposition s'y prête : on trouve 23 groupes de 3), puis faire des groupes de 3 groupes de 3 (23 se décompose en 7 groupes de 3 « troisaines » et il reste 2 « troisaines »), puis décomposer 7 en 2 groupes de 3 et il reste 1 groupe.

Procédure 2 : on peut compter (1, 2, ... 69) puis convertir 69 en base 3, soit par les divisions successives par 3, soit en divisant par 3^3 puis le reste par 3^2 puis le reste par 3.

c. Décrire trois procédures différentes permettant de répondre à la question précédente pour la base 10.

Procédure 1 : compter (1, 2, ... 69)

Procédure 2 : grouper par 10 (on obtient 6 groupes) puis compter les unités qui restent (9). Remarque : pour les grandes quantités, le comptage 1 à 1 est souvent fastidieux et source d'erreur et le passage aux groupements est spontané (qu'il s'agisse de groupements par 3, 5 ou 10, ce dernier ayant l'avantage de donner directement le résultat en base 10).

Procédure 3 : convertir en base 10 le résultat obtenu à la question en base 3 :

$(2120)_{trois} = 2\times 3^3 + 1\times 3^2 + 2\times 3 + 0\times 3^0 = 2\times 27 + 1\times 9 + 2\times 3 = 69$

4. Le tableau suivant donne des nombres écrits en base 10 et dans une base inconnue b.

Base 10	17	20	4	7	64	19	21	3	1
Base *b*	101	110	10	13	1000	103	111	3	1

a. Déterminer la valeur de *b*: L'écriture $(103)_b$ nous indique que $1\times b^2 + 0\times b + 3 = 19$.
D'où $b^2 + 3 = 19$ soit $b^2 = 16$. D'où $b = 4$ puisque b est un nombre entier positif.

b. Compléter le tableau.

Par des divisions successives par 4, on remplit la deuxième ligne à partir de la première.

Pour remplir la première : $(10)_{\text{quatre}} = 1\times 4 + 0 = 4$; $(1000)_{\text{quatre}} = 1\times 4^3 = 64$

5. a. Quelle est l'écriture en base 10 du plus grand nombre que l'on peut écrire avec 3 chiffres en base 5 ?

Le plus grand nombre que l'on peut écrire en base 5 avec 3 chiffres est $(444)_{\text{cinq}}$ soit 1 de moins que $(1000)_{\text{cinq}}$, c'est-à- dire 1 de moins que 5^3 ; le nombre le plus grand que l'on peut écrire avec 3 chiffres en base 5 s'écrit donc : $5^3 - 1 = 125 - 1 = 124$ en base 10.

b. Donner l'expression en base 10, en fonction de la valeur de *n*, du plus grand nombre à deux chiffres que l'on peut écrire en base *n*.

En base n, le nombre le plus grand à deux chiffres représente 1 de moins que $(100)_n$ soit un de moins que n^2.
Le nombre le plus grand que l'on peut écrire en base n avec deux chiffres s'écrit donc n^2 - 1 en base 10.

Exercice 3 – Un nombre inconnu

Un nombre de trois chiffres augmente de 540 lorsqu'on permute les deux chiffres de gauche et diminue de 27 lorsqu'on permute les deux chiffres de droite. La somme des chiffres de ce nombre est 15. Quel est ce nombre ?

Soit $\overline{abc}$ le nombre cherché.

Les données de l'énoncé sont traduites par : $\begin{cases} \overline{bac} = \overline{abc} + 540 \\ \overline{acb} = \overline{abc} - 27 \\ a + b + c = 15 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 100b + 10a + c = 100a + 10b + c + 540 \\ 100a + 10c + b = 100a + 10b + c - 27 \\ a + b + c = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -90a + 90b = 540 \\ -9b + 9c = -27 \\ a + b + c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 6 \\ -b + c = -3 \\ a + b + c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 6 \\ c = b - 3 \\ (b - 6) + b + (b - 3) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 6 \\ c = b - 3 \\ 3b = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 6 \\ c = b - 3 \\ b = 8 \end{cases}$$

Conclusion : $\begin{cases} a = 2 \\ c = 5 \\ b = 8 \end{cases}$ Le nombre cherché est : $\overline{abc} = 285$.

Exercice 4 – Algorithme de Kaprekar

L'algorithme de Kaprekar consiste à associer à tout nombre entier naturel *n* le nombre *K(n)* généré de la façon suivante :

- On considère les chiffres de l'écriture en base 10 du nombre *n*. On forme le nombre n_1 en rangeant ces chiffres dans l'ordre croissant et le nombre *n* et le nombre n_2 en rangeant ces chiffres dans l'ordre décroissant.
- On pose *k(n)* = $n_2 - n_1$

On itère ensuite le procédé en repartant du nombre *K(n)*.

Par exemple si on choisit *n* = 634, on obtient :

$n_1 = 346$ et $n_2 = 643$ donc *K(n)* = 643 - 346 = 297.

En itérant le procédé on obtient successivement :

K(297) = 972 – 279 = 693 ; *K*(693) = 594 ; *K*(594) = 495 ; *K*(495) = 495.

Ensuite tous les résultats sont égaux à 495.

1. Montrer que l'algorithme appliqué à 5 294 conduit aussi un entier *p* tel que *K(p)* = *p*.

K(5 294) = 9 542 – 2 459 = 7 083
K(7 083) = 8 730 – 0378 = 8 352
K(8 352) = 8 532 – 2 358 = 6 174
K(6 174) = 7 641 – 1 467 = 6 174

Le nombre *p* tel que *K(p)* = *p* vaut don 6 174.

2. On considère maintenant un nombre *m* qui s'écrit avec trois chiffres en base 10 : $m = \overline{abc}$ avec la condition 0 < *a* < *b* < *c*.

a. Montrer que le nombre *K(m)* est un multiple de 99.

$K(m) = \overline{cba} - \overline{abc} = (100c + 10b + a) - (100a + 10bc) = 99c - 99a = 99(c - a)$

$c - a$ est un entier comme différence de deux entiers donc $K(m)$ est bien un multiple de 99.

b. Montrer alors que l'algorithme appliqué au nombre *m* conduit au nombre 495 en cinq itérations au plus.

Comme on sait que 0 < *a* < *b* < *c*, alors il existe au moins un entier qui peut s'intercaler entre *a* et *c*, donc la différence $c - a$ vaut au minimum 2.

Etant donné que *a* et *c* sont des chiffres, donc des entiers compris entre 0 et 9 (avec *a* non nul), le maximum de $c - a$ est obtenu lorsque $c = 9$ et $a = 1$, soit $c - a = 8$.

Il y a donc sept valeurs possibles pour $c - a$, soit 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8.

Les sept valeurs de K(*m*) correspondantes sont donc, en utilisant K(*m*) = 99(*c* – *a*) :

$c - a$	2	3	4	5	6	7	8
K(*m*)	198	297	396	495	594	693	792

Appliquons l'algorithme de Kaprekar aux 7 nombres ci-dessus :

K(m)	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5
198	981 – 189 = 792	972 – 279 = 693	963 – 369 = 594	954 – 459 = 495	---
297	972 – 279 = 693	963 – 369 = 594	954 – 459 = 495	---	---
396	963 – 369 = 594	954 – 459 = 495	---	---	---
495	954 – 459 = 495	---	---	---	---
594	954 – 459 = 495	---	---	---	---
693	963 – 369 = 594	954 – 459 = 495	---	---	---
792	972 – 279 = 693	963 – 369 = 594	954 – 459 = 495	---	---

A partir de K(m), il faut appliquer au maximum 4 fois l'algorithme pour obtenir 495.

Donc, à partir du nombre m, il faut appliquer au maximum 5 fois l'algorithme.

Exercice 5 – Des nombres en base 6

On s'intéresse dans cet exercice à l'écriture des nombres en base 6.
Pour les distinguer des nombres écrits dans le système décimal usuel (base 10), les nombres écrits en base 6 seront surlignés. Ainsi l'écriture $\overline{12}$ désigne-t-elle le nombre 8.

1. Ecrire en base 10 le nombre qui s'écrit $\overline{235}$ en base 6.

Le nombre qui s'écrit $\overline{235}$ en base 6 est égal à $2 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5$, soit 95.

2. Ecrire en base 6 le nombre qui s'écrit 149 dans le système décimal usuel.
$6^2 = 36$, $6^3 = 216$.
On en déduit que l'écriture en base 6 de 148 est comprise entre $\overline{100}$ et $\overline{1000}$.
En effectuant la division euclidienne de 149 par 36, on trouve que $149 = 4 \times 36 + 5$.
Il en découle que 149 s'écrit $\overline{405}$ en base 6.

3. Donner un critère permettant de reconnaître les multiples de 6 d'après leur écriture en base 6. Justifier la validité de votre critère (on pourra se contenter de justifier sa validité pour les nombres s'écrivant avec trois chiffres au maximum).
Les multiples de 6 sont les nombres dont l'écriture en base 6 se termine par le chiffre 0.
En effet, le dernier chiffre de l'écriture en base 6 d'un nombre est égal au reste de la division euclidienne de ce nombre par 6. Ce reste est égal à 0 si et seulement si le nombre est un multiple de 6.

4. Donner un critère permettant de reconnaître les multiples de 3 d'après leur écriture en base 6.
Justifier la validité de votre critère.
Soit n un multiple de 3, il est égal à $3k$, k étant un entier. Distinguons deux cas :

- Si k est pair, alors le nombre est multiple de 6, son écriture en base 6 se termine par 0
- Si k est impair, posons $k = 2k' + 1$ on a alors $n = (2k' + 1) \times 3 = 6k' + 3$. Comme l'écriture en base 6 de $6k'$ se termine par 0, celle de n se termine par 3.

Donc : Les multiples de 3 ont leur écriture en base 6 se termine par 0 ou 3.
Réciproquement si l'écriture d'un nombre en base 6 se termine par 0 ou 3 alors en base 10, il est la somme de multiples de puissances de 6 et suivant les cas de 3 ou de 0. Il est donc multiple de 3 comme somme de multiples de 3.
Conclusion : Les multiples de 3 sont les nombres dont l'écriture en base 6 se termine par 0 ou 3.

Exercice 6 – Nombres lacunaires

1. a. Vérifier que l'écriture en base 3 du nombre 11 est $\overline{102}$.

$\overline{102} = 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 = 11$

b. Quelle est l'écriture en base 3 du nombre 74?

$74 = 27 + 27 + 9 + 9 + 2 = 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3 + 2 = \overline{2202}$

c. Que peut-on dire d'un nombre dont l'écriture en base 3 se termine par le chiffre « 0 » ?

Un nombre n dont l'écriture en base trois se termine par 0 est la somme de termes tous multiples de 3, il est donc multiple de 3.
Ce résultat peut se démontrer rigoureusement (au prix peut-être de quelques sueurs froides pour certains) :

Sens direct : L'écriture de n en base 3 se termine par un 0.
Donc, il existe des entiers $a_k,\ a_{k-1}, \dots, a_1$ et $a_0 = 0$ tels que :
$$n = a_k \times 3^k + a_{k-1} \times 3^{k-1} + \cdots + a_1 \times 3^1 + \underbrace{a_0 \times 3^0}_{=0}$$
$$= 3 \times \left(a_k \times 3^{k-1} + a_{k-1} \times 3^{k-2} + \cdots + a_1\right)$$
Et n est divisible par 3.

Réciproque : n est divisible par 3. Donc, il existe un nombre entier naturel n' tel que $n = 3 \times n'$.
Puis, il existe des entiers $a'_k,\ a'_{k-1}, \dots, a'_1$ et a'_0 tels que :
$$n' = a'_k \times 3^k + a'_{k-1} \times 3^{k-1} + \cdots + a'_1 \times 3^1 + a'_0$$
et ainsi : $n = 3 \times n' = a'_k \times 3^{k+1} + a'_{k-1} \times 3^k + \cdots + a'_1 \times 3^2 + a'_0 \times 3^1$
Par conséquent l'écriture de n en base 3 se termine par un 0.

On s'intéresse aux nombres entiers n dont aucun chiffre de l'écriture en base 3 ne prend la valeur 2.
On appellera ces nombres des entiers 2-lacunaires.
Par exemple 12 = 110 est 2-lacunaire alors que 19 = 201 ne l'est pas.

2. **a.** Déterminer le nombre d'entiers 2-lacunaires compris entre 0 et 100.

100 s'écrit $\overline{10201}$ en base 3. On va donc analyser tous les nombres possédant 4 chiffres ou moins en base 3 et certains de ceux à 5 chiffres.
Parmi les nombres qui possèdent au plus 4 (4 étant compris) chiffres en base 3, il y en a 2^4 = 16 qui sont 2-lacunaires (le premier chiffre est 0 ou 1 ; idem pour le second chiffre ; idem pour le troisième chiffre ; et idem pour le quatrième chiffre).
Parmi les nombres qui possèdent 5 chiffres en base 3, une étude au cas par cas est nécessaire :

Nombre en base 10	Ecriture en base 3	Le nombre est 2-lacunaire
81	10000	Oui
82	10001	Oui
83	10002	
84	10010	Oui
85	10011	Oui
86	10012	
87	10020	
88	10021	
89	10022	
90	10100	Oui
91	10101	Oui
92	10102	
93	10110	Oui
94	10111	Oui
95	10112	
96	10120	
97	10121	
98	10122	
99	10200	
100	10201	

Conclusion : Entre 0 (inclus) et 100, il y a 8 + 16 = 24 nombres 2-lacunaires.

b. A quelle condition nécessaire et suffisante un nombre 2-lacunaire possédant 4 chiffres en base 3 est-il divisible par 2 ?

Dans un nombre n 2-lacunaire les coefficients a_i valent 0 ou 1.
Si le coefficient vaut 1, le terme correspondant de la somme définissant n vaut 3^i qui est un nombre impair. Si le coefficient vaut 0, le terme correspondant de la somme est nul.

Un nombre 2-lacunaire est donc pair si et seulement s'il figure un nombre pair de chiffres 1 dans son écriture (ceci est vrai quel que soit le nombre de chiffres, et donc en particulier pour 4).

Le nombre de cas à étudier étant limité, une étude au cas par cas est le plus efficace :

Ecriture en base 10	Ecriture en base 3	Parité du nombre de chiffres 1	Divisible par 2
27	1000		
28	1001	Oui	Oui
30	1010	Oui	Oui
31	1011		
36	1100	Oui	Oui
37	1101		
39	1110		
40	1111	Oui	Oui

Tout entier 2-lacunaire possédant 4 chiffres en base 3 est divisible par 2 si et seulement s'il possède un nombre pair de chiffres 1 dans son écriture.

3. On appelle nombres 1-lacunaires les nombres entiers n dont aucun chiffre de l'écriture en base 3 ne prend la valeur 1.

a. Montrer que tout entier 1-lacunaire est le double d'un entier 2-lacunaire.

Si un nombre n est 1-lacunaire, alors dans l'écriture de n en base 3, tous les chiffres sont soit 0, soit 2.
Dans cette écriture, si on remplace chaque chiffre 2 par le chiffre 1, on obtient alors un nombre qui est la moitié de n puisque 1 est la moitié de 2 et que 0 est la moitié de 0.
Par exemple, 20020 est le double de 10010.

b. Montrer que tout entier peut se décomposer comme la somme d'un entier 2-lacunaire et d'un entier 1-lacunaire.

Soit n un nombre dont l'écriture en base 3 est : $n = a_k \times 3^k + a_{k-1} \times 3^{k-1} + \cdots + a_1 \times 3^1 + a_0$.
Les chiffres a_i sont soit 0, soit 1, soit 2.
Si on crée un nombre m en remplaçant dans n les chiffres 2 par 0 et un nombre p en remplaçant dans n les chiffres 1 par 0, on obtient deux nombres m et p tels que :

- m est 2-lacunaire
- p est 1-lacunaire
- $n = m + p$

Par exemple, si n = 2010221, on obtient m = 0010001 et p = 2000220 et on a bien n = 0010001 + 2000220.

c. Montrer que cette décomposition n'est pas toujours unique.

Un exemple pour lequel on a deux décompositions distinctes comme somme d'un nombre 2-lacunaire et d'un nombre 1-lacunaire suffit à montrer que la décomposition du **3.b**. n'est pas la seule possible.

Si on considère le nombre $\overline{10}$, la décomposition obtenue au **3.b**. est : $\overline{10} = \underbrace{\overline{10}}_{2-\text{lacunaire}} + \underbrace{\overline{0}}_{1-\text{lacunaire}}$.

Mais, on a également : $\overline{10} = \underbrace{\overline{1}}_{2-\text{lacunaire}} + \underbrace{\overline{2}}_{1-\text{lacunaire}}$.

<u>BONUS</u> : Cherchez mieux!