Exercice 1 – Te mau numera maohi

En polynésien (moderne), voici la liste des mots-nombres : *hô'ê, piti, toru, maha, pae, ono, hitu, va'u, iva, 'ahuru, 'ahuru ma hô'ê, 'ahuru ma piti, 'ahuru ma toru, 'ahuru ma maha, 'ahuru ma pae, 'ahuru ma ono, 'ahuru ma hitu, 'ahuru ma va'u, 'ahuru ma iva, E piti ahuru, E piti ahuru ma hô'ê... (la particule numérale "e" se place avant tous les nombres sauf Hô'ê et Aore (zéro), car "e" signifie "c'est" dans les prédicats numéraux)*
Et voici quelques exemples de correspondances entre numération orale et chiffrée :

23: E piti ‘ahuru mâ toru

95: E iva ‘ahuru mâ pae

324: E toru hânere e piti ‘ahuru mâ maha

555: E pae hânere e pae ‘ahuru mâ pae

2014: E piti tauatini ‘ahuru mâ maha

8023: E va’u tautini e piti ‘ahuru mâ pae

1 768 953: Hô’e miriôni e hitu hânere e ono ‘ahuru mâ va’u tauatini e iva hânere e pae ‘ahuru mâ toru

1. Ecrire en polynésien les nombres 60, 900, 2014.

2. Quelles sont les particularités du système oral polynésien ?
Quelles différences peut-on faire avec le système français ?

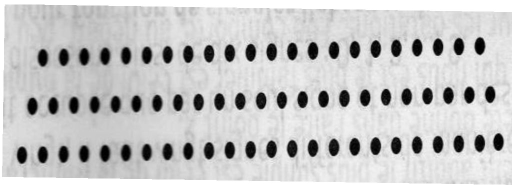
Exercice 2 – Questions indépendantes sur le calcul dans diverses bases de numération

1. Ecrire chacun des nombres dans la base indiquée :
a. 259 en base 5 ; 43 981 en base 16.
b. $(11244)_{\text{cinq}}$ en base 10 ; $(10754)_{\text{neuf}}$ en base 3 ; $(22102)_{\text{trois}}$ en base 9.

2. Donner le successeur et le prédécesseur des nombres suivants dans chacune des bases indiquées (on notera A, B etc. les chiffres au-delà de 9 dans les bases 13 et 11)

$(423)_{\text{cinq}}$; $(1000)_{\text{cinq}}$; $(233)_{\text{quatre}}$; $(10100)_{\text{deux}}$; $(1450)_{\text{treize}}$; $(999)_{\text{onze}}$; $(3333)_{\text{quatre}}$

3. a. Donner le cardinal de la collection de points ci-contre en base 3 et en base 10.
b. Décrire deux procédures différentes (à votre niveau), permettant de répondre à la question précédente pour la base 3.
c. Décrire trois procédures différentes permettant de répondre à la question précédente pour la base 10.



4. Le tableau suivant donne des nombres écrits en base 10 et dans une base inconnue *b*.

Base 10	17	20		7		19	21	3	1
Base *b*			10		1000	103			

a. Déterminer la valeur de *b*
b. Compléter le tableau.

5. a. Quelle est l’écriture en base 10 du plus grand nombre que l’on peut écrire avec 3 chiffres en base 5 ?
b. Donner l’expression en base 10, en fonction de la valeur de n, du plus grand nombre à deux chiffres que l’on peut écrire en base n.

Exercice 3 – Un nombre inconnu

Un nombre de trois chiffres augmente de 540 lorsqu'on permute les deux chiffres de gauche et diminue de 27 lorsqu'on permute les deux chiffres de droite. La somme des chiffres de ce nombre est 15. Quel est ce nombre ?

Exercice 4 – Algorithme de Kaprekar

L'algorithme de Kaprekar consiste à associer à tout nombre entier naturel n le nombre $K(n)$ généré de la façon suivante :

- On considère les chiffres de l'écriture en base 10 du nombre n. On forme le nombre n_1 en rangeant ces chiffres dans l'ordre croissant et le nombre n et le nombre n_2 en rangeant ces chiffres dans l'ordre décroissant.
- On pose $k(n) = n_2 - n_1$

On itère ensuite le procédé en repartant du nombre $K(n)$.

Par exemple si on choisit n = 634, on obtient :

$$n_1 = 346 \text{ et } n_2 = 643 \text{ donc } K(n) = 643 - 346 = 297.$$

En itérant le procédé on obtient successivement :

$$K(297) = 972 - 279 = 693 \;;\; K(693) = 594 \;;\; K(594) = 495 \;;\; K(495) = 495.$$

Ensuite tous les résultats sont égaux à 495.

1. Montrer que l'algorithme appliqué à 5 294 conduit aussi un entier p tel que $K(p) = p$.

2. On considère maintenant un nombre m qui s'écrit avec trois chiffres en base 10 : $m = \overline{abc}$ avec la condition $0 < a < b < c$.
a. Montrer que le nombre $K(m)$ est un multiple de 99.
b. Montrer alors que l'algorithme appliqué au nombre m conduit au nombre 495 en cinq itérations au plus.

Exercice 5 – Des nombres en base 6

On s'intéresse dans cet exercice à l'écriture des nombres en base 6.
Pour les distinguer des nombres écrits dans le système décimal usuel (base 10), les nombres écrits en base 6 seront surlignés. Ainsi l'écriture $\overline{12}$ désigne-t-elle le nombre 8.

1. Ecrire en base 10 le nombre qui s'écrit $\overline{235}$ en base 6.
2. Ecrire en base 6 le nombre qui s'écrit 149 dans le système décimal usuel.
3. Donner un critère permettant de reconnaître les multiples de 6 d'après leur écriture en base 6. Justifier la validité de votre critère (on pourra se contenter de justifier sa validité pour les nombres s'écrivant avec trois chiffres au maximum).
4. Donner un critère permettant de reconnaître les multiples de 3 d'après leur écriture en base 6. Justifier la validité de votre critère.

Exercice 6 – Nombres lacunaires

1. a. Vérifier que l'écriture en base 3 du nombre 11 est $\overline{102}$
b. Quelle est l'écriture en base 3 du nombre 74 ?
c. Que peut-on dire d'un nombre dont l'écriture en base 3 se termine par le chiffre « 0 » ?

On s'intéresse aux nombres entiers n dont aucun chiffre de l'écriture en base 3 ne prend la valeur 2. On appellera ces nombres des entiers 2-lacunaires.
Par exemple $12 = \overline{110}$ est 2-lacunaire alors que $19 = \overline{201}$ ne l'est pas.

2. a. Déterminer le nombre d'entiers 2-lacunaires compris entre 0 et 100.
b. A quelle condition nécessaire et suffisante un nombre 2-lacunaire possédant 4 chiffres en base 3 est-il divisible par 2 ?

3. On appelle nombres 1-lacunaires les nombres entiers n dont aucun chiffre de l'écriture en base 3 ne prend la valeur 1.
a. Montrer que tout entier 1-lacunaire est le double d'un entier 2-lacunaire.
b. Montrer que tout entier peut se décomposer comme la somme d'un entier 2-lacunaire et d'un entier 1-lacunaire.
c. Montrer que cette décomposition n'est pas toujours unique.

<u>BONUS</u> : Visionner cette vidéo : http://www.youtube.com/watch?v=nm0cw6b1PMA
Puis répondre à la question posée (sans tricher!)