Exercice 1 – VRAI / FAUX

Quelques règles à respecter dans un VRAI / FAUX
• Une affirmation mathématique est soit vraie, soit fausse.
• Un exemple, et même plusieurs exemples, ne suffisent pas pour prouver qu'une affirmation est vraie. Il est nécessaire pour montrer qu'une affirmation est vraie de faire appel à des théorèmes ou à des propriétés connus.
• Un exemple qui ne vérifie pas une affirmation suffit pour prouver que cette affirmation est fausse. Cet exemple est appelé alors contre-exemple. Mais ce n'est pas la seule façon de démontrer qu'une affirmation est fausse.
• Une constatation ou des mesures sur une figure ne suffisent pas pour prouver qu'une affirmation est vraie.

Dans cet exercice, des affirmations sont proposées. Pour chacune dire si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Pour tout nombre entier naturel n, le nombre $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Affirmation 2 : Si un nombre est multiple de 6 et de 9, alors il est aussi multiple de 54.

Affirmation 3 : Le produit de deux nombres pairs consécutifs est divisible par 8.

Affirmation 4 : Les nombres 231 567 808 771 et 3 457 799 045 311 n'ont pas de multiple commun.

Affirmation 5 : La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5.

Un homme a moins de 100 ans. L'an dernier, son âge était divisible par 11.
L'année prochaine, son âge sera divisible par 5.
Affirmation 6 : On est certain que cet homme a 34 ans.

Affirmation 7 : La somme des carrés de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Affirmation 8 : La somme de deux nombres premiers est toujours un nombre premier.

Affirmation 9 : La somme de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier.

Affirmation 10 : Shéhérazade commence à lire un conte un lundi soir. Elle lit 1001 nuits consécutives. Elle terminera un dimanche soir.

Affirmation 11 : Sans utiliser de calculatrice ni poser l'opération, on peut affirmer que l'écriture décimale du nombre $4^7 \times 5^{18}$ comporte 17 chiffres.

Exercice 2 – Les bonbons d'Emma
Emma propose à son ami Jules de lui donner ses bonbons à la condition qu'il trouve exactement combien elle en a. Emma lui dit qu'elle a moins de 100 bonbons et que lorsqu'elle les regroupe par deux, trois, quatre, cinq ou six, il lui en reste toujours un.
Combien Emma a-t-elle de bonbons ? Justifier la réponse en explicitant la démarche utilisée.

Exercice 3 – Questions indépendantes autour du PGCD / PPCM.
1. Pour les deux questions qui suivent, calculer de deux façons différentes :
a. le PGCD de 780 et de 504 **b.** le PPCM de 780 et de 504

2. Déterminer le PGCD et le PPCM des trois nombres 84, 270 et 426.

3. Le PGCD de deux nombres est 18. Leur PPCM est 648. Quels sont tous les couples possibles de nombres vérifiant ces deux conditions ?

Exercice 4 – Nombre associé à un entier
Etant donné un entier n supérieur ou égal à 10, on appelle associé de n l'entier obtenu en intercalant un 0 entre le chiffre de dizaines et celui des unités de n. Par exemple, l'associé de 5 467 est 54 607.
1. Quel est l'associé de 768 492 ?
2. L'entier 2 005 est-il l'associé d'un nombre ? Si oui lequel ?
3. a. Démontrer la propriété suivante : si n est un entier divisible par 9 alors son associé l'est également.
b. Formuler la réciproque de la propriété précédente.
c. Cette réciproque est-elle vraie ? Justifier.
4. Enoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur l'entier n, pour que son associé soit divisible par 4. La démontrer.
5. Démontrer que les restes de la division euclidienne de n et de son associé par 5 sont les mêmes.

Exercice 5 – Carrés contre carrés
On effectue à la calculatrice les calculs ci-dessous :
$123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2 = 4$
$45^2 - 44^2 - 43^2 + 42^2 = 4$
1. Tester ce résultat surprenant sur une autre série de quatre nombres consécutifs et émettre une conjecture.
2. Prouver que la conjecture faite précédemment est vraie

Exercice 6 – Nombres parfaits, déficients ou abondants

On justifiera toutes les réponses. Soit n un nombre entier naturel non nul.
On appelle f la fonction qui à n associe la somme des diviseurs de n.

Un nombre n est dit *parfait* lorsque : $f(n) = 2n$.
Un nombre n est dit *déficient* lorsque : $f(n) < 2n$.
Un nombre n est dit *abondant* lorsque : $f(n) > 2n$.

Dans l'exercice, on appelle « nature d'un nombre entier naturel non nul » sa classification dans l'une des catégories : nombre parfait, nombre déficient, nombre abondant.

1. a. Vérifier que 28 est un nombre parfait. **b.** Quelle est la nature du nombre 12 ?
2. Trouver le plus petit nombre déficient, le plus petit nombre parfait et le plus petit nombre abondant.
3. Quelle est la nature d'un nombre premier ?

Exercice 7 – Un entier sous conditions

Déterminer le nombre N satisfaisant simultanément aux trois conditions ci-dessous :

(1) N est divisible par 6 (2) N n'est pas divisible par 8 (3) N a exactement 15 diviseurs.

Exercice 8 – Blackjack !

On dit qu'un nombre est un nombre blackjack lorsque la somme de ses chiffres est égale à 21.

1. Existe-t-il des nombres blackjack à deux chiffres ? Pourquoi ? Quel est le plus petit nombre blackjack ?
2. Quel est le plus grand nombre blackjack à cinq chiffres ? Expliciter la démarche suivie.
3. Trouver les deux nombres blackjack qui encadrent 2000 (le plus grand inférieur à 2000 et le plus petit supérieur à 2000). Expliciter la démarche suivie.
4. a. Existe-t-il des nombres blackjack multiples de 9 ? Si oui les citer, sinon justifier la réponse.
b. Existe-t-il des nombres blackjack à trois chiffres multiples de 11 ? Si oui, les citer tous, sinon justifier la réponse.
5. On s'intéresse aux nombres blackjack N à quatre chiffres vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Lorsqu'on intervertit le chiffre des dizaines avec celui des centaines, on obtient un nombre N' supérieur à N avec $N' - N = 450$.
- Lorsqu'on intervertit le chiffre des centaines avec celui des unités, on obtient un nombre N'' supérieur à N avec $N'' - N = 198$

Trouver tous les nombres N et justifier la réponse.

Exercice 9 – Autour du nombre 1001

1. Ecrire 1 001 sous la forme d'un produit de 3 nombres entiers différents de 1.
2. Trouver tous les diviseurs de 1 001. On s'attachera à présenter cette recherche de façon simple, claire et systématique.
3. Soit un nombre qui s'écrit sous la forme $\overline{abcabc}$ où a, b et c sont des chiffres du système de numération positionnelle décimale avec $a \neq 0$. Quelle(s) condition(s) éventuelle(s) doivent vérifier a, b, c pour que le nombre $\overline{abcabc}$ soit :

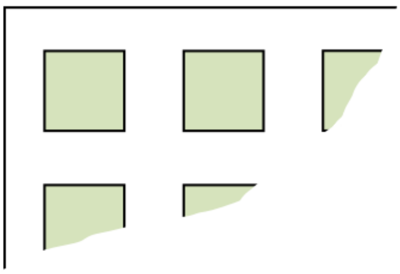
a. un multiple de 7 ? **b.** un multiple de 13 ?
c. un multiple de 65 ? **d.** un multiple de 63 ?

Exercice 10 – Des problèmes autour du PGCD / PPCM ou pas

<u>**Partie A**</u> **:** Un fleuriste a reçu 1756 roses blanches et 1317 roses rouges. Il désire réaliser des bouquets identiques (c'est à dire comportant le même nombre de roses et la même répartition entre les roses rouges et les roses blanches), en utilisant toutes les fleurs.

1. Quel sera le nombre maximal de bouquets identiques ?
2. Combien de roses de chaque couleur y aura t-il dans chaque bouquet ?

<u>**Partie B**</u> **:** On utilise ici un moule de pâtisserie ayant la forme d'un pavé droit de base carrée de côté 7 cm et de hauteur 1,5 cm.



Un four professionnel est composé de quatre plaques de cuisson rectangulaires de 40 cm par 70 cm. Le pâtissier veut disposer ses moules en lignes et en colonnes comme sur la figure ci-contre en laissant au moins 1 cm entre deux moules et au moins 1 cm entre les moules et le bord des plaques.
Combien de moules au maximum pourra-t-il placer dans son four ? Justifier.

<u>**Partie C**</u> **:** Une machine A automatisée produit un son toutes les 1224 secondes, une autre machine B, elle aussi automatisée, produit un son toutes les 456 secondes. Elles sont mises en route au même instant.

1. Au bout de combien de secondes les deux sons seront-ils, pour la première fois, produits simultanément ?
2. Donner la réponse précédente en heures, minutes et secondes.