Exercices de renforcement

(corrigés en TD pour les étudiants ayant choisi ce renforcement, en autocorrection les autres)

Exercice 1 – Une base aux curieux chiffres

On dispose d'un système de numération positionnelle et des signes *a, e, i, o, u* pour écrire TOUS les entiers naturels. Ecrire les nombres 2, 4, 5, 9, 10, 15 et 18 à l'aide de ces signes, sachant que *a, e, i, o, u* sont dans l'ordre croissant et que *a* représente la quantité nulle.

En utilisant, par exemple, la méthode du compteur (Voir Cours I.2.c. page 9 et 10), on peut déterminer la correspondance ci-contre :

Nombre en base 10	Nombre dans la nouvelle base
2	*i*
4	*u*
5	*ea*
9	*eu*
10	*ia*
15	*oa*
18	*oo*

Exercice 2 – $\overline{11}$ et $\overline{111}$

1. Compléter le tableau ci-dessous en donnant l'écriture décimale des nombres $\overline{11}^{\,n}$ et $\overline{111}^{\,n}$ pour les différentes valeurs de la base envisagée.

	$\overline{11}^{\,n}$	$\overline{111}^{\,n}$
$n = 2$	3	7
$n = 3$	4	13
$n = 4$	5	21
$n = 5$	6	31
$n = 6$	7	43

2. Calculer n sachant que : $\overline{111}^{\,n} = 73$.

D'après ce qui précède, la valeur de n cherchée est strictement supérieure à 6.

Si $n = 7$ alors : $\overline{111}^{\,n} = 7^2 + 7 + 1 = 57$. Si $n = 8$ alors : $\overline{111}^{\,n} = 8^2 + 8 + 1 = \mathbf{73}$.

Pour $n > 8$, $\overline{111}^{\,n}$ aura une valeur en base 10 strictement plus grande que 73.

La valeur de n cherchée est donc 8.

3. Calculer n sachant que : $(\overline{11}^{\,n})^2 - \overline{111}^{\,n} = 5$.

$(\overline{11}^{\,n})^2 - \overline{111}^{\,n} = (1 \times n^1 + 1 \times n^0)^2 - (1 \times n^2 + 1 \times n^1 + 1 \times n^0) = (n+1)^2 - (n^2 + n + 1) = n$

La valeur de n cherchée est donc 5.

4. L'équation $(\overline{11}^{\,n})^2 - \overline{111}^{\,n} = \overline{10}^{\,n}$ permet-elle de déterminer la base n ?

Puisque $(\overline{11}^{\,n})^2 - \overline{111}^{\,n} = n$ et $\overline{10}^{\,n} = n$, résoudre l'équation demandée revient à résoudre $n = n$.

Cette équation permet de déterminer une base n puisque tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est solution. Par contre, cette valeur n'est pas unique.

Exercice 3 – Des sommes et des conversions

1. Calculer dans passer par la base 10 puis vérifier en passant par la base 10.

a. $\overline{41}^{\,7} + \overline{25}^{\,7}$ **b.** $\overline{41}^{\,6} + \overline{25}^{\,6}$

Base 7

$$\begin{array}{rrr} & 4 & 1 \\ + & 2 & 5 \\ \hline & 6 & 6 \end{array}$$

Base 6

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & \\ & 4 & 1 \\ + & 2 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$\overline{41}^{\,7} + \overline{25}^{\,7} = 4 \times 7 + 1 + 2 \times 7 + 5 = 48$

$\overline{66}^{\,7} = 6 \times 7 + 6 = 48$

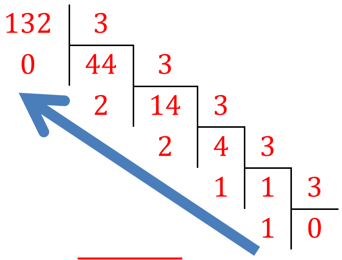
$\overline{41}^{\,6} + \overline{25}^{\,6} = 4 \times 6 + 1 + 2 \times 6 + 5 = 42$

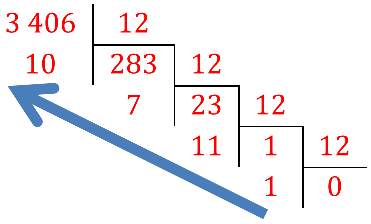
$\overline{110}^{\,6} = 1 \times 36 + 1 \times 6 = 42$

2. Compter de 7 en 7 en base 11 en partant de $\overline{A91}^{\,11}$. On s'arrêtera au 3ème nombre trouvé.

En comptant de 7 en 7, après $\overline{A91}^{\,11}$ vient $\overline{A98}^{\,11}$ puis $\overline{AA4}^{\,11}$ et enfin $\overline{1000}^{\,11}$.

3. Convertir 132 en base 3 puis 3 406 en base 12.





Ainsi : $132 = \overline{11220}^{\,3}$

Ainsi : $3\,406 = \overline{1(11)7(10)}^{\,12} = \overline{1B7A}^{\,12}$

Exercice 4 – La base 7

Dans cet exercice, on utilise la convention suivante :
Un nombre surmonté d'un trait doit s'interpréter en base sept, ainsi l'écriture $\overline{10}$ *désigne le nombre sept, l'écriture* $\overline{21}$ *désigne le nombre quinze. Les nombres écrits sans ce trait se lisent en base dix.*

On pourra si nécessaire utiliser les égalités suivantes :

$7^3 = 343$; $7^4 = 2401$; $7^5 = 16807$; $7^6 = 117649$; $7^7 = 823543$

On considère le nombre entier A qui s'écrit $\overline{32063}$ en base sept.

1. Sans convertir A en base dix, déterminer l'écriture en base sept des nombres :

a. A + 49 $49 = 7^2$ 49 s'écrit donc $\overline{100}$ en base 7. Il en résulte que $A + 49 = \overline{32063} + \overline{100} = \overline{32163}$.

b. A + 686 $686 = 2 \times 7^3$ 686 s'écrit donc $\overline{2000}$ en base 7.
Il en résulte que $A + 686 = \overline{32063} + \overline{2000} = \overline{34063}$.

c. 2A Posons l'addition A + A directement en base 7.

$$\begin{array}{r} \overline{32063} \\ +\overline{32063} \\ \hline \end{array}$$

Le 2ème rang en partant de la droite est le plus difficile car la somme obtenue y est supérieure à 6, plus grand chiffre dont on dispose en base 7.
En base 7, on a : $\overline{6} + \overline{6} = \overline{15}$.
On en déduit que $2A = \overline{32063} + \overline{32063} = \overline{64156}$.

2. Soit B le plus grand nombre entier qui s'écrit avec 6 chiffres en base sept, donner l'écriture en base sept de B.
Le plus grand nombre qui s'écrit avec six chiffres en base 7 est obtenu en donnant à chacun de ses chiffres la plus grande valeur possible. On a donc $B = \overline{666666}$.

3. Indiquer deux méthodes permettant de déterminer l'écriture en base dix du nombre B. L'une des deux méthodes devra utiliser une seule opération (les valeurs des puissances de 7 fournies n'ont pas à être recalculées).
Première méthode : $B + 1 = \overline{1\,000\,000} = 7^6$ donc $B = 7^6 - 1 = 117649 - 1 = 117648$.

Deuxième méthode :

$B = 6\times7^5 + 6\times7^4 + 6\times7^3 + 6\times7^2 + 6\times7 + 6$
$B = 6\times(7^5 + 7^4 + 7^3 + 7^2 + 7 + 1)$

Or $7^5 + 7^4 + 7^3 + 7^2 + 7 + 1 = 16807 + 2401 + 343 + 49 + 7 + 1 = 19608$

$B = 6\times19603 = 117648$.

Exercice 5 – VRAI/FAUX

1. Si un nombre est divisible par 3, alors il est divisible par 12. **FAUX.**
Contre-exemple : 30 est divisible par 3 mais 30 n'est pas divisible par 12.
Remarque : Si un nombre est divisible par 3, alors il est de la forme $3k$, avec k entier. Pour que $3k$ soit divisible par 12, il faudrait que k contienne 2^2 dans sa décomposition en facteurs premiers, ce qui n'est pas nécessairement le cas.

2. Si un nombre est divisible par 12, alors il est divisible par 3. **VRAI.**
Si n est un nombre est divisible par 12, alors il est de la forme $12k$, avec k entier.
On peut écrire : $n = 12k = 3 \times 4k$ où $4k$ est un entier. Donc n est divisible par 3.

3. Si un nombre est un multiple de 4 et de 7, alors c'est un multiple de 28. **VRAI.**
Utilisons la propriété du cours (II.5.a. page 19) : si n est divisible par a et par b, alors n est divisible par ab seulement si a et b sont premiers entre eux.
Ici, on a $a = 4$ et $b = 7$ et n est multiple de 4 et de 7. Comme PGCD(4,7) = 1, alors 4 et 7 sont premiers entre eux et on peut conclure que n est un multiple de 28 (ou divisible par 28, ce qui est équivalent).

4. Si un nombre est un multiple de 4 et de 12, alors c'est un multiple de 48. **FAUX.**
Contre-exemple : 60 est un multiple de 4 ($60 = 4 \times 15$) et 60 est un multiple de 12 ($60 = 5 \times 12$) mais 60 n'est pas divisible par 48.
Remarque : la propriété utilisée précédemment n'est pas applicable ici puisque PGCD(4, 12) = 4 et donc 4 et 12 ne sont pas premiers entre eux.

5. Le nombre 123 456 789 est premier. **FAUX.**
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Or, 45 est un multiple de 9 donc 123456789 est un multiple de 9 (critère de divisibilité par 9)

6. Le nombre 1 789 est premier. **VRAI.**
On utilise la méthode du cours (II.3. page 5) : On calcule la racine carrée de 1789 : $\sqrt{1789} \approx 42{,}3$.
On teste si 1789 est divisible par chacun des nombres premiers inférieur à sa racine carrée, à savoir : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 et 41.
Si 1789 n'est divisible par aucun de ces nombres premiers, alors il sera lui-même premier.
1789 n'est pas divisible par 2 car son chiffre des unités n'est pas 0, 2, 4, 6 ou 8.
1789 n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffres ($1 + 7 + 8 + 9 = 25$) n'est pas un multiple de 3.
1789 n'est pas divisible par 5 car son chiffre des unités n'est pas 0 ou 5.
Pour les nombres premiers suivants, on effectue les divisions euclidiennes et on vérifie si le reste est nul ou non (ce qui est équivalent à vérifier si le quotient est entier ou non) :

Nombre premier	Résultat de la division	Le nombre premier est-il un diviseur ?
7	$1789/7 \approx 255{,}57$	Non
11	$1789/11 \approx 162{,}63$	Non
13	$1789/13 \approx 137{,}62$	Non
17	$1789/17 \approx 105{,}24$	Non
19	$1789/19 \approx 94{,}16$	Non
23	$1789/23 \approx 77{,}78$	Non
29	$1789/29 \approx 61{,}69$	Non
31	$1789/31 \approx 57{,}71$	Non
37	$1789/37 \approx 48{,}35$	Non
41	$1789/41 \approx 43{,}63$	Non

1789 n'est divisible par aucun de ces nombres premiers, alors 1789 est premier.

7. Tout nombre premier compris entre 200 et 250 a pour chiffre des unités 1, 3, 7 ou 9. **VRAI.**
Si n est un nombre premier compris entre 200 et 250, il ne peut pas se terminer par 0, 2, 4, 6, 8, sinon il serait pair et le seul nombre premier pair est 2 (qui n'est pas compris dans l'intervalle [200 ; 250]. Il ne peut pas non plus se terminer par 5, sinon il serait un multiple de 5 (et il ne peut être égal à 5 car 5 n'est pas dans l'intervalle donné). Il reste donc comme possibilités que le nombre premier se termine par 1, 3, 7 ou 9.
Remarque : on aurait pu aussi chercher tous les nombres premiers de l'intervalle [200 ; 250] et vérifier que leur chiffre des unités est bien 1, 3, 7 ou 9, mais c'est beaucoup plus long ...

8. Tout nombre compris entre 200 et 250 ayant pour chiffre des unités 1, 3, 7 ou 9 est premier. **FAUX.**

Contre-exemple : 231 se termine par un 1, est compris entre 200 et 250 et n'est pas premier puisque la somme de ses chiffres se divisant par 3 (2 + 3 + 1 = 6), c'est un multiple de 3.

9. Le nombre de diviseurs de 2520 est 48. **VRAI.**

D'après une propriété du cours (II.2.f. page 16-17), le nombre de diviseurs d'un nombre s'obtient en ajoutant 1 à chaque puissance de chaque facteur premier rencontré dans la décomposition de ce nombre puis en effectuant le produit de ces nombres. Décomposons 2520 en facteurs premiers :

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
	1

On a $2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

Le nombre de diviseurs de 2520 s'obtient en calculant :
$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 4 \times 3 \times 2 \times 2$
$= 48$

Le nombre de diviseurs de 2520 est bien 48.

10. A et B sont deux nombres entiers strictement inférieurs à 100 dont les écritures à deux chiffres utilisent les mêmes chiffres dans l'ordre inverse. Comme, par exemple, 21 et 12 ou bien 40 et 04. Le nombre $A + B$ est divisible par 11.

Si on note : $A = \overline{du} = 10d + u$ alors $B = \overline{ud} = 10u + d$.

Ainsi : $A + B = 10d + u + 10u + d = 11d + 11u = 11(d + u)$ avec $d + u$ entier

Donc $A + B$ est bien divisible par 11.

Exercice 6 – Dans la table de 9 ?

Je suis un nombre entier de trois chiffres. Si on échange mes deux chiffres de droite j'augmente de 36. Si on échange mes deux chiffres de gauche j'augmente de 270.
Suis-je divisible par 9 ?

Notons $\overline{cdu}$ le nombre entier vérifiant les conditions énoncées.
Ainsi : $\overline{cdu} = 100c + 10d + u$
Lorsqu'on échange ses deux chiffres de droite, on obtient le nombre : $\overline{cud} = 100c + 10u + d$
Lorsqu'on échange ses deux chiffres de gauche, on obtient le nombre : $\overline{dcu} = 100d + 10c + u$

Les deux conditions s'expriment donc ainsi : $\begin{cases} \overline{cud} = \overline{cdu} + 36 \\ \overline{dcu} = \overline{cdu} + 270 \end{cases}$

$$\begin{cases} \overline{cud} = \overline{cdu} + 36 \\ \overline{dcu} = \overline{cdu} + 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100c + 10u + d = 100c + 10d + u + 36 \\ 100d + 10c + u = 100c + 10d + u + 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u - 9d = 36 \\ 90d - 90c = 270 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9(u - d) = 9 \times 4 \\ 90(d - c) = 90 \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - d = 4 \\ d - c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = d + 4 \\ d = c + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = c + 7 \\ d = c + 3 \end{cases}$$

Comme : $u = c + 7$, le chiffre c n'a que de valeur possible qui sont 1 et 2 sinon u serait supérieur à 9.
Et comme : $d = c + 3$, on en déduit que $\overline{cdu} = 148$ ou $\overline{cdu} = 259$.

Grâce à la somme de leurs chiffres, on peut affirmer qu'aucun de ces deux nombres n'est divisible par 9.
Donc $\overline{cdu}$ n'est pas divisible par 9.

Exercice 7 – « Mind Reader »

On trouve sur Internet, sous le nom de « Mind Reader », le jeu à lire sur le TD.
Éric joue trois fois de suite à ce jeu. Chaque fois, l'ordinateur « devine » le bon symbole : ☺
Ce « Mind Reader » semble infaillible. L'est-il vraiment? Justifier la réponse.

Soit $n = \overline{du}$ le nombre pensé.
La soustraction de la 2ème étape donne : $n - d - u = \overline{du} - d - u = 10d + u - d - u = 9d$
Ainsi n est toujours un multiple de 9. Reste maintenant à regarder dans la case de tous les multiples de 9 pour s'apercevoir que c'est toujours le même symbole qui apparait.